

基于原子范数的波达方向与时延联合估计方法

徐明^{1,2}, 唐倩¹

(1. 上海海事大学信息工程学院, 上海 201306; 2. 同济大学电子与信息工程学院, 上海 201804)

摘要: 为了解决水声通信环境下自主式水下机器人定位难的问题, 提出了一种基于原子范数的波达方向 (DOA) 与时延联合估计方法。首先, 基于水声多径多普勒效应的特点建立信道冲激响应公式, 将接收信号用矩阵形式表示并对参数进行归一化处理。然后, 针对水听器阵列的几何结构和多普勒效应带来的相位误差建立一个新的原子集合, 考虑到水声信号在空间域的稀疏性, 利用原子范数最小化求解相应的原子。最后, 针对由任意线阵带来半正定矩阵中的子矩阵为非 Toeplitz 矩阵结构而无法进行 Vandermonde 分解的问题, 定义了一个有关水听器几何结构的 Hermitian 集合, 利用长椭圆波函数进行半正定规划求解, 获得 DOA 和时延的联合估计。实验结果表明, 所提方法在信噪比为 20 dB 时, DOA 估计的均方根误差低至 0.2°, 在 DOA 间隔低至 3° 时仍有 77.98% 的估计成功概率, 估计时延与实际时延的误差可以达到微秒级。

关键词: 原子范数; 波达方向; 时延; 多径多普勒效应

中图分类号: TN911

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2024186

Joint DOA-delay estimation approach based on atomic norm

XU Ming^{1,2}, TANG Qian¹

1. College of Information Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China

2. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China

Abstract: To address the difficult problem of localizing autonomous underwater vehicle in underwater acoustic communication environments, a joint DOA-delay estimation approach based on atomic norm was proposed. Firstly, a channel impulse response formula was established based on the characteristics of underwater acoustic multipath and Doppler effects, and the received signal was represented in a matrix form with normalized parameters. After that, a new set of atoms was established based on the geometric structure of the hydrophone array and the phase error caused by the Doppler effects. Considering the sparsity of the underwater acoustic signal in the spatial domain, the corresponding atoms were solved using atomic norm minimization. Finally, in order to solve the problem that the sub-matrix in the positive semi-definite matrix caused by arbitrary linear arrays was a non-Toeplitz matrix structure and could not be decomposed by Vandermonde, a Hermitian set about the geometric structure of the hydrophone was defined, and the prolate spheroidal wave functions were used to solve the semi-definite programming problem to obtain a joint estimate of DOA and delay. The experimental results show that the root mean square error (RMSE) of the proposed approach is as low as 0.2° when the signal-to-noise ratio (SNR) is 20 dB, and there is still a 77.98% estimation success probability when the DOA interval is as low as 3°. The error between the estimation delay and the actual delay can reach the microsecond level.

Keywords: atomic norm, direction of arrival, delay, multipath and Doppler effect

收稿日期: 2024-05-31; 修回日期: 2024-10-09

通信作者: 徐明, mingxu@shmtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62172269)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.62172269)

0 引言

近年来,自主式水下机器人(AUV, autonomous underwater vehicle)在海洋应用中发挥着越来越重要的作用。然而,当AUV潜入水中达到一定深度时只能通过水声信道进行通信,无法通过全球定位系统进行定位^[1]。由于水声信道是一个复杂的时-空-频变的随机信道,具有多径效应、传输衰落、多普勒效应和传播时延^[2-3],这给AUV的定位带来了困难。波达方向(DOA, direction of arrival)与时延的联合估计方法可以有效解决AUV的定位问题。其中,DOA估计提供了关于声源方向的信息,用来确定声源的大致位置。而时延估计则提供了声源与水听器之间距离的信息,进一步确定了声源的精确位置。目前,主流的基于信号子空间的参数估计算法,如多重信号分类(MUSIC, multiple signal classification)算法^[4]和基于旋转不变技术估计信号参数(ESPRIT, estimation of signal parameters via rotational invariance techniques)算法^[5],在假设信号不相干的前提下,通过特征值分解将测量空间分解为信号子空间和噪声子空间以获得准确的参数估计。然而,在水声多径场景下,由于各路径信号之间只差了一个复常数而产生了相干信号。因此,信号不相干的假设会导致基于信号子空间的参数估计算法出现秩亏问题而失效。此外,基于信号子空间的参数估计算法对噪声和异常值非常敏感,且依赖于信号的一些先验知识和理想的收发阵列模型^[6],因此不适用于水下多径信号的DOA估计。

为了实现多径场景下的DOA估计,文献[7]提出了前后向平滑(FBSS, forward-backward spatial smoothing)去相干算法,但是该算法减小了阵列的有效孔径,降低了分辨率,且只能应用于均匀线性阵列(ULA, uniform linear array)。最大似然^[8](ML, maximum likelihood)方法可以解决这个问题,但是计算量很大。为了消除分辨率限制,许多基于稀疏信号的方法被应用于估计水下多径信号的DOA,如压缩感知^[9](CS, compressive sensing)方法,由于该方法假设点源位于网格上,因此会出现基不匹配^[10]的问题,从而导致性能降低。如果将网格划分得更细,则可实现更高的恢复精度,但同时会使计算复杂度过高^[11]。基于原子范数最小化(ANM, atomic norm minimization)的无网格方

法^[12-14]可以有效解决基不匹配的问题,实现连续域上的参数估计,在信号的精度恢复上存在优势。ANM也可以用来解决二维参数估计问题^[15-16]。其中,基于向量化的ANM具有噪声鲁棒性并且适用于单快拍的场景,但是计算复杂度较高。文献[17]提出的解耦ANM可以显著降低计算复杂度。上述基于ANM的无网格方法要求阵列必须具有等间距^[14,18],才可以利用阵列协方差矩阵的Toeplitz结构进行Vandermonde分解,进而估计相应的DOA。然而,部署在AUV上的水听器由于海水腐蚀和其他外部因素影响,设备的物理损坏是不可避免的。因此,本文考虑更为普遍的非均匀线性阵列(NLA, non-uniform linear array)。NLA相较于ULA在相同的水听器数目下可以扩大阵列孔径,具有阵元间互耦效应小的优点。此外,一些特殊的阵列结构,如互质阵列^[19]和稀疏阵列^[20],能够有效扩展自由度。文献[21-22]提出了利用阵列插值和流形分离的虚拟ULA的阵列流形来近似NLA的阵列流形,但扩展了信号长度使其计算复杂度增加。文献[23]通过傅里叶级数来逼近任意的阵列流形,但其只应用一维DOA估计。文献[24]考虑了增益相位误差场景下的DOA估计问题,提出了一种增益相位-原子范数最小化(GP-ANM, gain-phase ANM)方法。然而,上述方法没有考虑到由于信源运动而产生的多普勒效应对估计精度的影响。此外,现有的原子范数要求阵列结构是均匀的,无法适用于水声多径场景下的非均匀线性阵列结构。因为对现有原子范数软阈值问题转化成半正定规划(SDP, semidefinite program)问题进行求解时,半正定矩阵中的DOA信息子矩阵为非Toeplitz矩阵,无法通过Vandermonde分解得到DOA。

针对上述问题,本文提出了一种基于原子范数的波达方向与时延联合估计方法(DDAN, joint DOA-delay estimation approach based on atomic norm)。DDAN可以对具有水声多径效应和多普勒效应场景下的任意线阵信号模型实现DOA与时延的联合估计。首先,建立信道冲激响应(CIR, channel impulse response)公式,在接收端进行快速傅里叶变换(FFT, fast Fourier transformation)得到信道状态信息(CSI, channel state information)的最小二乘估计,将接收信号用矩阵形式表示,并对时延和DOA参数进行归一化处理。然后,建立

一个有关水听器阵列位置和多普勒效应带来的相位误差的原子集合。考虑到水声信号在空间域的稀疏性,构造了包含多普勒、时延和DOA的原子范数以及原子范数软阈值问题,证明了原子范数软阈值问题中发送信号的原子范数等于半正定矩阵中斜对角线矩阵元素迹之和的一半,将原子范数软阈值问题转化成可求解的SDP问题,获得DOA和时延的联合估计。

1 信号模型

本文假设在每个AUV上都部署了 M 个非均匀线性水听器,这些水听器相对于参考水听器的位置表示为 $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_M\} d \in \mathbb{R}^M$,选取第一个水听器作为参考水听器,因此 $p_1 = 0$; $d = \frac{\lambda}{2}$ 为水听器之间的单位间隔, λ 为波长。假设一个具有 K 个子载波的正交频分复用(OFDM, orthogonal frequency division multiplexing)信号有 L 条不同的传播路径,则CIR可表示为

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \mathbf{a}(\theta_l) \delta(t - \tau_l) e^{j2\pi f_d t} \quad (1)$$

本文假设所有的路径具有相同的多普勒参数 f_d ,并且路径的复衰减、时延和多普勒参数在块时间间隔内恒定。其中, $\alpha_l = |\alpha_l| e^{j\psi_l}$ 表示第 l 条路径的复衰减, $|\alpha_l|$ 表示第 l 条路径的振幅, ψ_l 表示第 l 条路径的相位,在区间 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布, $\mathbf{a}(\theta_l)$ 表示导向矢量, τ_l 和 θ_l 分别表示第 l 条路径的传播时延和DOA。假设第 k 个子载波的频率为 f_k ,则第 m 个水听器对第 l 条路径的阵列响应可表示为

$$\mathbf{a}(\theta_l)_m = e^{-j2\pi f_k \tau_m(\theta_l)} \quad (2)$$

其中, $\tau_m(\theta_l) = \frac{p_m d \sin \theta_l}{c}$ 表示第 l 条路径中第 m 个水听器和参考水听器的相对传播时延, c 表示声速, $f_k = f_c + k\Delta f$, f_c 表示载波频率, Δf 表示OFDM子载波间隔。

在接收端通过调整FFT窗口,就可以得到第 m 个水听器和第 k 个子载波之间的CSI的最小二乘估计,表示为

$$h_{m,k} = \sum_{l=1}^L \alpha_l e^{-j2\pi(f_c + k\Delta f)(\tau_l + \tau_m(\theta_l))} e^{j2\pi f_d \tau_l} + n_{m,k} \quad (3)$$

其中, $n_{m,k}$ 表示第 m 个水听器和第 k 个子载波处的加性白高斯噪声,服从均值为0、方差为 ρ^2 的高斯

分布,其中 $-\frac{K-1}{2} \leq k \leq \frac{K-1}{2}$ 且 $1 \leq m \leq M$ 。

根据关系式 $\tau_m(\theta_l) = \frac{p_m d \sin \theta_l}{c}$,其中 $d = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f_c}$,

$\sin \theta_l \in [-1, 1]$,可得 $\tau_m(\theta_l) \in \left[-\frac{p_m d}{c}, \frac{p_m d}{c} \right] = \left[-\frac{p_m}{2f_c}, \frac{p_m}{2f_c} \right]$ 。在本文实验中,水听器的位置

$p_m \in [0, 20]$,因此 $\tau_m(\theta_l) \in \left[-\frac{10}{f_c}, \frac{10}{f_c} \right]$ 。由于 $\tau_l \in$

$\left[-\frac{1}{2\Delta f}, \frac{1}{2\Delta f} \right]$,并且在实际情况下 $f_c \gg \Delta f$,因此

$\tau_m(\theta_l)$ 的取值范围远小于 τ_l 的取值范围。在本文实验中,载波频率 f_c 为13 kHz,子载波间隔 Δf 为9.54 Hz,计算可得 $\tau_m(\theta_l) \in [-0.000769, 0.000769]$ 和 $\tau_l \in [-0.0524, 0.0524]$,因此对于同一水听器上相邻2个子载波的CSI,由DOA引入的相移 $2\pi\Delta f\tau_m(\theta_l)$ 与 $2\pi\Delta f\tau_l$ 相比可忽略不计,则式(3)可近似为

$$h_{m,k} \approx \sum_{l=1}^L \alpha_l e^{-j2\pi f_k \tau_l} e^{-j2\pi \frac{f_c p_m d \sin \theta_l}{c} \tau_l} e^{-j2\pi k \Delta f \tau_l} e^{j2\pi f_d \tau_l} + n_{m,k} \quad (4)$$

将式(4)表示成矩阵形式并进行归一化处理,表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{A} \mathbf{C} \mathbf{B}^T(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) + \mathbf{N} = \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1, -\frac{K-1}{2}} & \cdots & h_{1, \frac{K-1}{2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M, -\frac{K-1}{2}} & \cdots & h_{M, \frac{K-1}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 为接收

信号矩阵, $(\cdot)^T$ 为转置符号, $\mathbf{A}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = [\mathbf{a}(\tilde{\theta}_1),$

$\mathbf{a}(\tilde{\theta}_2), \dots, \mathbf{a}(\tilde{\theta}_L)] \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 为阵列流形矩阵, $\mathbf{a}(\tilde{\theta}_l)_m =$

$e^{-j2\pi p_m \tilde{\theta}_l}$ 为 $\mathbf{a}(\tilde{\theta}_l)$ 的第 m 项,且 $\tilde{\theta}_l = \frac{f_c d \sin \theta_l}{c} \in$

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$; $\mathbf{B}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = [\mathbf{b}(\tilde{\tau}_1), \mathbf{b}(\tilde{\tau}_2), \dots, \mathbf{b}(\tilde{\tau}_L)] \in \mathbb{C}^{K \times L}$ 为

时延参数矩阵, $\mathbf{b}(\tilde{\tau}_l)_k = e^{-j2\pi k \tilde{\tau}_l}$ 为 $\mathbf{b}(\tilde{\tau}_l)$ 的第 k 项,且

$\tau_l \in \left[-\frac{1}{2\Delta f}, \frac{1}{2\Delta f} \right]$,因此 $\tilde{\tau}_l = \Delta f \tau_l \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$; $\mathbf{A} =$

$\text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{C}^{L \times L}$, $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L]$,其中, $\beta_l = \alpha_l e^{-j2\pi f_c \tau_l}$

由待估计的第 l 条路径的复衰减和时延构成, $\mathbf{C} = \text{diag}(e^{j2\pi f_d \tau_1}, \dots, e^{j2\pi f_d \tau_L}) \in \mathbb{C}^{L \times L}$ 为包含多普勒参数和

$$\text{时延的矩阵, } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{1, \frac{K-1}{2}} & \cdots & n_{1, \frac{K-1}{2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{M, \frac{K-1}{2}} & \cdots & n_{M, \frac{K-1}{2}} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times K}$$

为噪声矩阵。

本文的目标是通过 \mathbf{H} 估计出 L 条路径的参数对 (τ_l, θ_l) 。

2 基于原子范数的 DOA-时延估计方法

根据以上模型定义带相位误差矩阵形式的原子集合 \mathcal{A}_M 为

$$\mathcal{A}_M \triangleq \left\{ e^{j\psi} s(f_d, \tilde{\tau}) \mathbf{\Gamma}(\tilde{\theta}, \tilde{\tau}) \in \mathbb{C}^{M \times K}, \right. \\ \left. \tilde{\theta}, \tilde{\tau}, f_d \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], \psi \in [0, 2\pi] \right\} \quad (6)$$

其中, $s(f_d, \tilde{\tau}) \triangleq e^{\frac{j2\pi(f_c - f_d)\tilde{\tau}}{M}}$ 为多普勒效应所带来的相位误差, $\mathbf{\Gamma}(\tilde{\theta}, \tilde{\tau}) \triangleq \mathbf{a}(\tilde{\theta}) \mathbf{b}^T(\tilde{\tau})$ 。式(5)中的信号 \mathbf{X} 可看作由原子集合 \mathcal{A}_M 的凸包 $\text{conv}(\mathcal{A}_M)$ 中选择最少的原子构成, 基于上述原子集合 \mathcal{A}_M , 对应的原子范数可表示为

$$\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M} = \inf \left\{ l > 0: \mathbf{X} \in l \text{conv}(\mathcal{A}_M) \right\} = \\ \inf_{e^{j\psi} s(f_d, \tilde{\tau}) \mathbf{\Gamma}(\tilde{\theta}, \tilde{\tau}) \in \mathcal{A}_M} \left\{ \sum_l |\alpha_l| \left| \mathbf{X} = \sum_l \alpha_l e^{j\psi_l} s(f_d, \tilde{\tau}_l) \mathbf{\Gamma}(\tilde{\theta}_l, \tilde{\tau}_l) \right. \right\} \quad (7)$$

根据上述原子范数的定义, 原子范数软阈值问题^[12]可表示为

$$\min_{\mathbf{X}} \eta \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M} + \|\mathbf{H} - \mathbf{X}\|_F^2 \quad (8)$$

其中, $\|\mathbf{H} - \mathbf{X}\|_F^2$ 用来控制噪声项, $\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M}$ 用来增强稀疏性, η 表示正则化参数。

实际上, 式(8)是一个 NP 难问题, 当 $(\tilde{\tau}_l, \tilde{\theta}_l)$ 满足时延和 DOA 的最小可分辨间隔条件, 且 $L \leq \min(M, K)$ 时, 可以把式(8)转化成式(9)所示的 SDP 形式进行求解, 证明见附录 1。

$$\min_{\mathbf{P} \in \mathbb{Z}, \mathbf{u}_x, \mathbf{X}} \frac{\eta}{2} \left(\text{tr}(\mathbf{P}) + \text{tr}(\text{toep}(\mathbf{u}_x)) \right) + \|\mathbf{H} - \mathbf{X}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \text{toep}^T(\mathbf{u}_x) \end{pmatrix} \succeq 0 \quad (9)$$

其中, $(\cdot)^H$ 为共轭转置符号, \succeq 为半正定符号, $\text{toep}^T(\mathbf{u}_x) \in \mathbb{C}^{K \times K}$ 为 Hermitian Toeplitz 矩阵, 具体

形式为

$$\text{toep}^T(\mathbf{u}_x) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_K \\ u_2^H & u_1 & \cdots & u_{K-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_K^H & u_{K-1}^H & \cdots & u_1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $\text{toep}(\mathbf{u}_x)$ 包含时延信息。由于水听器之间不是等间距的, 因此包含 DOA 信息的 \mathbf{P} 无法构成 Toeplitz 矩阵。定义 \mathbb{Z} 为 Hermitian 集 $\left\{ \mathbf{a}(\tilde{\theta}) \mathbf{a}^H(\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\}$ 的闭锥凸包, 且 $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{M \times M}$, $\mathbf{P} \in \mathbb{Z}$ 意味着 \mathbf{P} 可以表示为 $\mathbf{P} = \sum_l \varpi_l \mathbf{a}(\tilde{\theta}_l) \mathbf{a}^H(\tilde{\theta}_l)$ 的形式, 其中 $\varpi_l \geq 0$ 。

由于式(9)中的 \mathbf{P} 为非 Toeplitz 矩阵结构, 因此无法通过 Vandermonde 分解得到相应的 DOA, 本文利用长椭圆波函数构造 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{P} \in \mathbb{Z}$ 。定义 \mathbb{L}^2 为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ 上所有平方可积函数的集合并且 $w = \pi p_M$ 。对任意的 $r \in \mathbb{L}^2$, 长椭圆波函数可定义为线性映射 $\zeta: \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ 的特征函数, 如式(11)所示^[25]。

$$(\zeta r)(v) = \int_{-1}^1 e^{iw\zeta v} r(\zeta) d\zeta, \quad \forall v \in [-1, 1] \quad (11)$$

因此, 第 i 个长椭圆波函数 r_i 满足 $\zeta r_i = \gamma_i r_i$, 其中 γ_i 为 ζ 的第 i 个特征值, $|\gamma_i| \geq |\gamma_{i+1}|$, 根据文献[26], 当 i 大于 $\frac{2w}{\pi}$ 时 $|\gamma_i|$ 趋于零, 将所需长椭圆波函数的数量限制为 $N_p = \left\{ \min \frac{i}{2} \mid |\gamma_i| < \epsilon \right\}$, 其中 ϵ 为期望的精度, 对式(9)中的变量 $\mathbf{P} \in \mathbb{Z}$ 使用长椭圆波函数。

引理 1^[25] 当且仅当存在 $v_0 \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_{N_p} \in \mathbb{C}$ 使得 $\mathbf{E} \succeq 0$ 和 $\Psi(\mathbf{E}) \succeq 0$, 则 $\mathbf{P} \in \mathbb{Z}$, 其中, $\mathbf{P}_{q_1, q_2} = \mathbf{d}_{q_1, q_2}^T \mathbf{\Phi}^{-1} [v_{N_p}^*, \dots, v_1^*, v_0, v_1, \dots, v_{N_p}]^T$, $q_1, q_2 \in [1, M]$, $\mathbf{\Phi}_{q_1, i} = r_{i-1} \left(\frac{q_1 - N_p - 1}{N_p} \right)$, $\mathbf{d}_{q_1, q_2}(i) = r_{i-1} \left(\frac{p_{q_1} - p_{q_2}}{p_M} \right)$, $\mathbf{E} = \text{toep}(v_0, v_1, \dots, v_{N_p})$, $\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{N_p}, \mathbf{0}_{N_p \times 1}]$, $\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{N_p \times 1}, \mathbf{I}_{N_p}]$, $\Psi(\mathbf{E}) = \tan^2 \left(\frac{w}{2N_p} \right) (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) \mathbf{E} (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^H - (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \mathbf{E} (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)^H$, \mathbf{I}_{N_p} 是 $N_p \times N_p$ 维的单位矩阵, $\mathbf{0}_{N_p \times 1}$ 是 $N_p \times 1$ 维所有元素为 0 的向量, $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{(2N_p+1) \times (2N_p+1)}$, $\mathbf{d}_{q_1, q_2} \in \mathbb{R}^{(2N_p+1)}$ 。

利用引理 1, 式(9)中的 ANM 问题可以由以下 SDP 形式表示为

$$\begin{aligned} \min_{v_0, v_1, \dots, v_{N_p}, \mathbf{u}_x, \mathbf{X}} & \frac{\eta}{2} \left(\text{tr}(\mathbf{P}) + \text{tr}(\text{toep}(\mathbf{u}_x)) \right) + \|\mathbf{H} - \mathbf{X}\|_F^2 \\ \text{s.t.} & \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \text{toep}^T(\mathbf{u}_x) \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & \mathbf{P}_{q_1, q_2} = \mathbf{d}_{q_1, q_2}^T \Phi^{-1} [v_{N_p}^*, \dots, v_1^*, v_0, v_1, \dots, v_{N_p}]^T \\ & \mathbf{E} = \text{toep}(v_0, v_1, \dots, v_{N_p}) \succeq 0 \\ & \Psi(\mathbf{E}) = \tan^2\left(\frac{w}{2N_p}\right) (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2) \mathbf{E} (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^H - \\ & \quad (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) \mathbf{E} (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)^H \succeq 0 \end{aligned} \quad (12) \end{aligned}$$

得到的最优值 $\hat{\mathbf{E}}$ 满足 Vandermonde 分解, 表示为

$$\hat{\mathbf{E}} = |\alpha_l| \boldsymbol{\omega} \begin{pmatrix} 2\pi\hat{\theta}_l P_M \\ N_p \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^H \begin{pmatrix} 2\pi\hat{\theta}_l P_M \\ N_p \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}(\vartheta) = [1, e^{-j\vartheta}, \dots, e^{-j\vartheta N_p}]$, 可以得到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

定义矩阵 $\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z})$ 为

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) = [\mathbf{z}^{\xi_0} \dots \mathbf{z}^{\xi_{K-1}}]^T = [\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z_1) \dots \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z_L)] \quad (14)$$

其中, $\xi_0, \xi_{K-1} \in \left[-\frac{K-1}{2}, \frac{K-1}{2}\right]$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^L$, 并且

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z_1) = [z_1^{\xi_0} \dots z_1^{\xi_{K-1}}]^T \in \mathbb{C}^K.$$

将 $\text{toep}(\mathbf{u}_x)$ 进行特征值分解取噪声子空间 $\mathbf{U}_N \in \mathbb{C}^{K \times (K-L)}$ 计算零谱, 如式(15)所示.

$$\begin{aligned} G(z) &= \|\mathbf{U}_N^H \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z)\|_2^2 = \\ & \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z)^H \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z) = \\ & \mathbf{w} \left(\boldsymbol{\xi}, \frac{1}{z} \right)^T \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}, z) \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $|z| = 1$, $\mathbf{S} = \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \in \mathbb{C}^{K \times K}$, 当子载波索引连续时, $G(z)$ 可展开成关于 z 的多项式, 如式(16)所示.

$$G(z) = s_{-(K-1)} z^{-(K-1)} + \dots + s_y z^y + \dots + s_{(K-1)} z^{(K-1)} \quad (16)$$

其中, $s_y = \sum_{k_1, k_2}^{K-1} \mathbf{S}_{k_1, k_2}$, $k_1 - k_2 = y$, s_y 为 \mathbf{S} 对角线上的和, 多项式 $G(z)$ 的阶数为 $2(K-1)$, 共有 $(K-1)$ 对相互共轭的根, 在这 $(K-1)$ 对根中, 有 L 个根 z_1, \dots, z_L 在无噪声的情况下正好分布在单位圆上, 在有噪声的情况下分布在单位圆附近. 当子载波索引非连续时, $G(z)$ 可展开为

$$G(z) = \sum s_{q_g} z^{q_g} \quad (17)$$

其中, $s_{q_g} = \sum_{k_1, k_2}^{K-1} \mathbf{S}_{k_1, k_2}, \xi_{k_1} - \xi_{k_2} = q_g$ 为 \mathbf{S} 指定行列元素

的和, q_g 为两子载波索引之差, $\{(k_1, k_2) | \xi_{k_1} - \xi_{k_2} = q_g, k_1, k_2 \in [0, K-1]\}$ 只与子载波的索引有关, 避免了谱峰搜索.

通过求解多项式(16)的解, 取距离单位圆 10^{-4} 之内的解. 利用归一化 $z_l = e^{-j2\pi\hat{\tau}_l} = e^{-j2\pi\tau_l \Delta f}$ 求出每条路径的时延 $\hat{\tau}_l = -\frac{\angle z_l}{2\pi\Delta f}$, 其中 \angle 表示求相位角.

为了得到 L 条路径的参数对 $(\hat{\tau}_l, \hat{\theta}_l)$, 需通过简单的配对原则, 如式(18)所示.

$$f(\hat{\tau}_l)_{l=1, \dots, L} = \arg \max_{\hat{\theta}} |\mathbf{a}^H(\hat{\theta}) \hat{\mathbf{X}} \mathbf{b}^*(\hat{\tau}_l)| \quad (18)$$

算法 1 列出了本文方法涉及的主要步骤.

算法 1 基于原子范数的 DOA 与时延联合估计算法

输入 接收信号矩阵 \mathbf{H} , 正则化参数 η

输出 DOA 与时延对 $(\hat{\tau}_l, \hat{\theta}_l), l \in [1, L]$

1) 将 \mathbf{H} 、 η 代入式(12)求得最优解 $\hat{\mathbf{X}}$ 、 $\hat{\mathbf{u}}_x$ 和 v_0, v_1, \dots, v_{N_p}

2) 利用 $\hat{\mathbf{u}}_x$ 和 v_0, v_1, \dots, v_{N_p} 根据式(12)构成 $\text{toep}(\hat{\mathbf{u}}_x)$ 和 \mathbf{E}

3) 对 \mathbf{E} 进行 Vandermonde 分解, 根据式(13)通过 $\hat{\theta}_l = \arcsin\left(-\frac{N_p c \angle \theta_l}{2\pi p_M d f_c}\right)$ 得到 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

4) 对 $\text{toep}(\hat{\mathbf{u}}_x)$ 进行特征值分解得到噪声子空间 \mathbf{U}_N , 计算 $\mathbf{S} = \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$

5) 计算式(16)的解, 取靠近单位圆的解, 根据 $\hat{\tau}_l = -\frac{\angle z_l}{2\pi\Delta f}$ 得到 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$

6) 根据式(18)进行配对得到 $(\hat{\tau}_l, \hat{\theta}_l), \forall l$

3 计算复杂度分析

本节将对 DDAN、交替投影 (AP, alternating projections) 方法^[27]、两步多普勒 (2step-Dopper) 方法^[28]的计算复杂度进行比较和分析.

DDAN 的计算复杂度主要由求解 SDP 问题 $O\left(N_i \max\left((M+K)^3, (N_p+1)^3\right)\right)$ 、计算零谱 $O(K^3 + K^{2(K-L)}) \cong O(K^3)$ 和 Vandermonde 分解 $O(N_p^2)$ 构

成, 其中, N_i 为迭代的次数, N_p 为长椭球波函数的数量, 因此总的计算复杂度为 $O\left(N_i \max\left((M + K)^3, (N_p + 1)^3\right) + N_p^2 + K^3\right)$ 。

AP 方法^[27]的计算复杂度为 $O(N_i M^3 K^3)$, 其中, N_i 为迭代的次数。2step-Doppler 方法^[28]的计算复杂度为 $O(M^2 N_c N_d + K_{Dk} M^3) \geq O(M^4)$, 其中, N_c 为多普勒测量的周期数, N_d 为多普勒离散傅里叶变换 (DFT, discrete Fourier transform) 大小, 且 $N_d \gg N_c > M$, K_{Dk} 为分数多普勒相同但 DOA 不同的目标数。

4 实验结果与分析

为了验证本文方法的有效性, 将其与 AP 方法和 2step-Doppler 方法进行性能比较。AP 方法采用参数交替优化的思想, 通过交替投影在不同参数子空间中寻找最优解, 适用于非均匀水听器阵列环境下的参数估计问题。2step-Doppler 方法采用分数多普勒、整数多普勒和 DOA 联合估计的方法, 在多路径传播环境下, 可以有效减少参数估计误差。仿真实验在 Microsoft Windows11 系统的计算机上使用 MATLAB R2016b 进行仿真。计算机配置为 Intel (R) Core(TM) i5-12500H CPU @ 2.5 GHz。本文采用 $Q = 200$ 次蒙特卡罗实验下计算均方根误差 (RMSE, root mean squared error), 定义为

$$\text{RMSE} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \sqrt{\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q (\hat{\theta}_{l,q} - \theta_{l,q})^2} \quad (19)$$

其中, $\hat{\theta}_{l,q}$ 为第 q 次实验时第 l 条路径的估计值, $\theta_{l,q}$ 为真实值。

本文利用 Bellhop 工具箱对水声多径信道进行实验仿真, 环境数据采用了在卡迪兹地区西班牙的海试真实数据。其中, 水体温度在 25°C 至 35°C 之间, 空气湿度约为 98%, 海况较平静, 气压约为 1 013 hPa, 风速为 12 m/s, AUV 部署在海深 10 m 处, 接收方带有 15 阵元垂直非均匀线阵的全向水听器, 与发送方位于同一深度, 水平距离为 16 m, 环境噪声功率为 -20 dB, 吸收损耗参数为 4, 传播损耗参数为 10, 其他实验参数如表 1 所示。其中, 路径个数为 4, AP 方法需要假设该信息是先验已知的, 而 2step-Doppler 方法和 DDAN 不需要该假设。

参数	数值
水听器个数 M /个	15
水听器间隔 d /m	0.058
水听器位置 P /m	[0,1,2,3,4,6,9,10,13,14,15,17,18,19,20] d
载波频率 f_c /kHz	13
子载波间隔 Δf /Hz	9.54
子载波个数 K /个	33
路径个数 L /个	4
真实时延 τ /ms	[15.294,45.113,30.799,55.996]
真实 DOA θ	[26.533°, 63.865°, 100.016°, 103.566°]

表 2 给出了 3 种方法的运行时间, 其中, $M=15$, $K=33$, AP 方法中设置最大迭代次数为 40 次, 运行时间为 9.576 s; 2step-Doppler 方法的 N_c 为 20, N_d 为 100, 运行时间为 6.208 s; DDAN 的运行时间为 1.821 s, 远低于 AP 方法和 2step-Doppler 方法。

方法	运行时间/s
AP	9.576
2step-Doppler	6.208
DDAN	1.821

图 1 给出了克拉美-罗下界 (CRLB, Cramer-Rao lower bound) 及不同 DOA 估计方法均方根误差与信噪比 (SNR, signal-to-noise ratio) 的关系。由于水下环境噪声较大, SNR 范围设置为 [-10,20] dB。由图 1 可知, AP 方法在 SNR 为 [-10,0] dB 情况下估计精度最差, 这是因为水下环境噪声较大会影响协方差矩阵的特征值分解, 破坏信号子空间与噪声子空间的正交性, 从而导致其无法有效分离。2step-Doppler 方法需要先根据多普勒频谱估计分数多普勒, 在低信噪比下存在谐波会混淆信号的频谱特征, 影响后续 DOA 和整数多普勒的估计。DDAN 在 SNR 为 -5 dB 时表现出 4° 左右的估计精度, 其他方法的估计精度在 10° 以上, 这是因为 DDAN 在目标函数中考虑了噪声项, 并利用正则化参数平衡了与稀疏性的关系, 并且在 SNR 为 0~20 dB 时, DDAN 的估计误差最低, 低至 0.2°, 表明了 DDAN 的有效性。

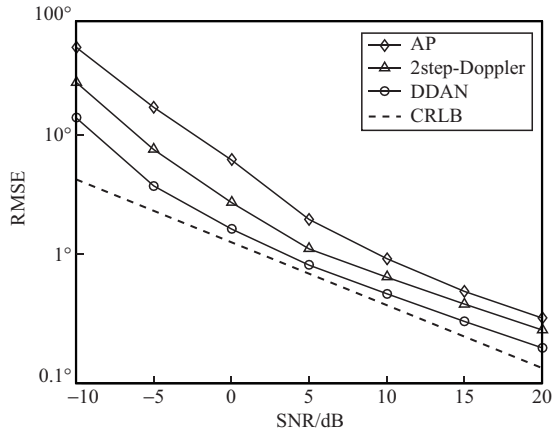


图 1 RMSE 与 SNR 的关系 (M=15)

图 2 给出了不同 DOA 估计方法均方根误差与阵元数的关系。在 SNR=10 dB 且其他条件相同的情况下，阵元数以 5 为间隔从 10 增加到 30，当阵元数增加时，阵列孔径扩大了，DOA 估计误差会减小，表明随着阵元数增加所有方法的 RMSE 都有所降低。在不同阵元数下，DDAN 相较于 AP 方法和 2step-Doppler 方法 RMSE 更低，具有更高的估计精度。

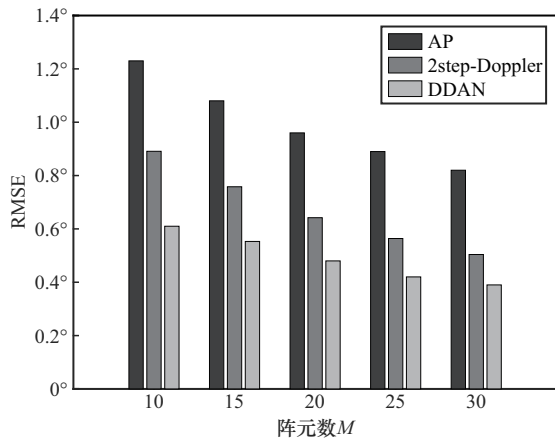


图 2 RMSE 与阵元数 M 的关系 (SNR=10 dB)

图 3 给出了在 SNR=10 dB、DOA 的最小可分辨间隔为 0.005° 条件下的空间谱，其中虚线为真实 DOA 的位置，实线为 DDAN 的空间谱，点线为 AP 方法的空间谱。从图 3 中可以看出，DDAN 有 4 个谱峰，AP 方法仅有 3 个谱峰，无法成功估计出 103.566° 这个 DOA。DDAN 要求各个参数满足的最小可分辨间隔条件为充分非必要条件。其中，DOA 最小间隔需要满足的最小可分辨间隔条件可

表示为 $\Delta\tilde{\theta} = \min_{i \neq j} |\tilde{\theta}_i - \tilde{\theta}_j| \geq \frac{1}{\left[\frac{M-1}{4}\right]} = 0.33$ ，时延

最小间隔需要满足的最小可分辨间隔条件可表示为 $\Delta\tilde{\tau} = \min_{i \neq j} |\tilde{\tau}_i - \tilde{\tau}_j| \geq \frac{1}{\left[\frac{K-1}{4}\right]} = 0.125$ 。由于 DDAN

定义的矩阵形式原子集合只要当一个参数满足最小可分辨间隔条件时，另一个参数的最小可分辨间隔条件可以降低。在本文实验中，时延最小间隔 $\min_{i \neq j} |\tilde{\tau}_i - \tilde{\tau}_j| = 0.1366 > 0.125$ ，满足时延间隔的最小可分辨间隔条件，因此 DOA 间隔 $\Delta\tilde{\theta}$ 低至 0.005° 时仍有较高的估计成功概率，可以成功分辨出 100.016° 和 103.566° 这 2 个相近的 DOA。

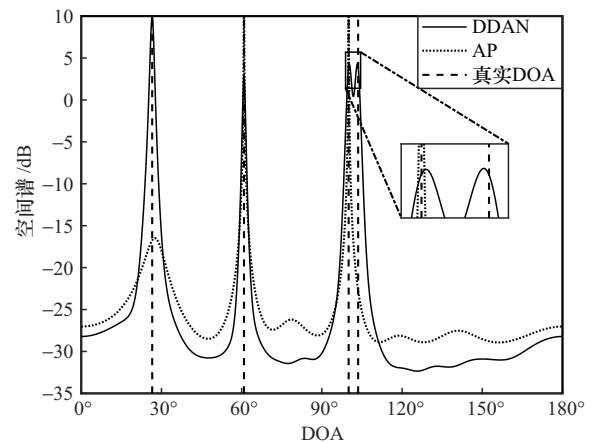


图 3 空间谱

图 4 给出了不同方法估计成功概率的比较。在 $M=15$ 、 $K=33$ 、 $SNR=10$ dB 的条件下，仅考虑 $\theta_1 = 100^\circ$ 和 $\theta_2 = 100^\circ + \Delta\theta$ 这 2 个 DOA，其中 $\Delta\theta$ 从 15° 减小到 3°，如果每个估计值与实际值之间的误差小于 5%，则认为该估计值是成功的。当 $\Delta\theta$ 为 15° 到 5° 时，DDAN 具有 90% 以上的估计成功概率。当 $\Delta\theta$ 低至 3° 时，DDAN 仍具有 77.98% 的估计成功概率。这是因为 DDAN 利用信号的稀疏性和低秩性将其转化为一个凸优化问题，避免了网格搜索的过程，从而降低了计算复杂度。此外，由于满足了时延间隔的最小可分辨间隔条件，当 $\Delta\theta$ 变小时，DDAN 的估计成功概率并没有显著降低。2step-Doppler 方法通过 DFT 得到多普勒频谱，然后基于该频谱进行分数多普勒的精细估计，这一步骤的计算复杂度为 $O(M^2 N_c N_d) \geq O(M^4)$ 。整数多普勒和 DOA 是对代价函数进行搜索得到，计算复杂度为 $O(K_{Dk} M^3)$ 。由于 DFT 频谱的分辨率取决于搜索间隔，因此当 $\Delta\theta$ 变小时，频谱上的能量会更加集中，

影响分数多普勒的精度。由于 DOA 和整数多普勒参数之间的耦合效应会导致代价函数出现多个局部极小值，这个问题在 $\Delta\theta$ 变小时尤其明显，进而降低了参数估计的精度，因此当 $\Delta\theta$ 低至 3° 时，估计成功概率为 37.34%。AP 方法在每次迭代中都需要进行特征值分解，计算复杂度为 $O((MK)^3)$ 。当 $\Delta\theta$ 变小时，信号的空间特性会发生变化，并且多普勒参数的影响导致特征值分解过程不准确，影响半正定矩阵在 2 个低秩空间之间进行投影的过程，从而降低了估计的精度。当 $\Delta\theta$ 低至 6° 时，其 RMSE 增加到 4° ，导致 AP 方法的估计成功概率明显降低。当 $\Delta\theta$ 低至 3° 时，AP 方法的估计成功概率仅为 1.36%。

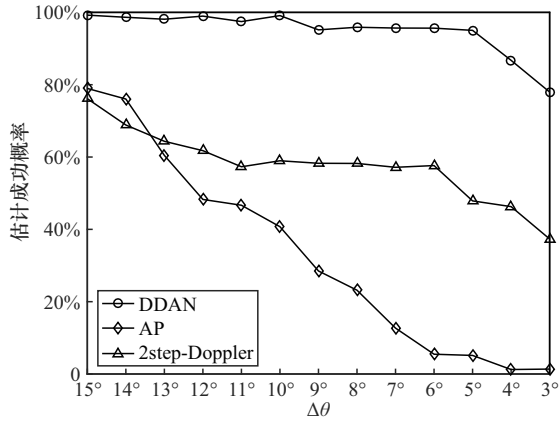


图 4 $\Delta\theta$ 与估计成功概率的关系 (SNR=10 dB)

图 5 描绘了多项式的根与真实时延的关系，其中虚线为单位圆，*表示真实时延的位置，根据欧拉公式计算得出实部为 $\cos(-2\pi\tau_i\Delta f)$ ，虚部为 $\sin(-2\pi\tau_i\Delta f)$ ， \circ 所在的位置是根据式(16)中关于 z 的多项式 $G(z)$ 计算得出的根。当子载波个数 $K=33$ 时，多项式 $G(z)$ 的次数为 64，其中有 32 对相互共轭的根，在求解出的 64 个根中取距离单元圆 10^{-4} 内的根就是算法 1 想找的根，一共有 4 个根在单位圆附近与真实时延的位置重叠，找到的根与真实时延的关系为 $z_i = e^{-j2\pi\tau_i\Delta f}$ 。根据算法 1 的步骤 5) $\hat{\tau}_i = -\frac{\angle z_i}{2\pi\Delta f}$ 计算得到的估计时延为 [15.296, 45.118, 30.792, 55.994] ms，与实际时延的误差在微秒级。目标运动会产生距离参数误差，导致距离误差在厘米级，且 2step-Doppler 方法要求目标运动速度最大不能超过 1.5219 m/s，因此时延的误差在毫秒级以上。

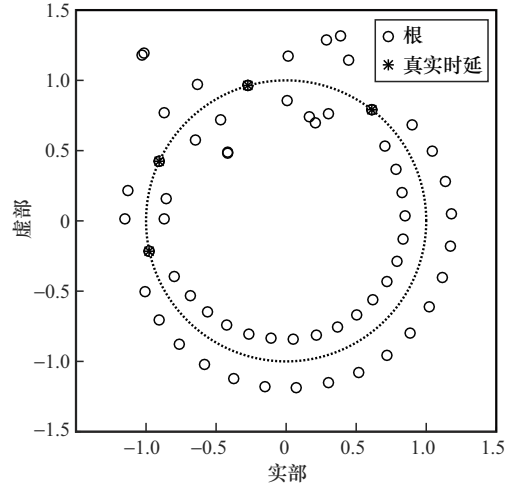


图 5 根与真实时延的关系

5 结束语

为了解决水声通信环境下自主式水下机器人定位难的问题，本文提出了一种基于原子范数的 DOA 与时延联合估计方法。该方法根据水听器阵列的几何结构和多普勒效应带来的相位误差定义了一个新的原子集合，利用原子范数捕捉水声信号的稀疏性，针对由任意线阵带来半正定矩阵中的子矩阵为非 Toeplitz 矩阵结构而无法进行 Vandermonde 分解的问题，定义了一个有关水听器几何结构的 Hermitian 集合，利用长椭圆波函数进行半正定规划求解并获得 DOA 和时延的联合估计，避免了对比方法中的迭代搜索和特征值分解等高计算量步骤，保证了全局最优解的获得。与现有方法相比，DDAN 在估计 DOA 时具有更高的估计精度和分辨率，估计时延与真实时延的误差可以达到微秒级。

附录 1 原子范数的 SDP 形式

令 $g(\mathbf{u}_x, \mathbf{P}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\hat{\mathbf{P}}) + \text{tr}(\text{toep}(\tilde{\mathbf{u}}_x)))$ ，用 $S_X^+(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})$ 表示对于给定 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 条件下满足半正定矩阵的可行集合 $(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})$ ，如式(20)所示。

$$S_X^+(\mathbf{u}_x, \mathbf{P}) = \left\{ (\mathbf{u}_x, \mathbf{P}) \mid \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \text{toep}^T(\mathbf{u}_x) \end{pmatrix} \succeq 0, \mathbf{P} \in \mathbb{Z} \right\} \quad (20)$$

令 $\text{SDP}(\mathbf{X}) = \min_{(\mathbf{u}_x, \mathbf{P}) \in S_X^+(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})} g(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})$ ，接着证明 $\text{SDP}(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M}^\circ$ 。

首先，证明 $\text{SDP}(\mathbf{X}) \leq \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M}^\circ$ 。

对于任意的 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 存在唯一的分解 $\mathbf{X} = \sum_l |\alpha_l| e^{j\psi_l} \mathbf{f}_l(f_d, \tilde{\tau}_l) \cdot \Gamma(\tilde{\theta}_l, \tilde{\tau}_l)$ 且 $e^{j\psi_l} \mathbf{f}_l(f_d, \tilde{\tau}_l) \Gamma(\tilde{\theta}_l, \tilde{\tau}_l) \in \mathcal{A}_M$ ，因此 $\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M} = \sum_l |\alpha_l|$ 。

接下来,根据本文的信号模型构造 $\text{toep}(\tilde{\mathbf{u}}_x)$ 和 $\tilde{\mathbf{P}}$, 具体形式如式(21)和式(22)所示。

$$\text{toep}(\tilde{\mathbf{u}}_x) \triangleq \left\{ \sum_I \alpha_I |\mathbf{b}(\tilde{\tau}_I) \mathbf{b}^H(\tilde{\tau}_I), \tilde{\tau}_I \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} \triangleq \left\{ \sum_I \alpha_I |\mathbf{a}(\tilde{\theta}_I) \mathbf{a}^H(\tilde{\theta}_I), \tilde{\theta}_I \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \quad (22)$$

可得到

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^H & \text{toep}^T(\tilde{\mathbf{u}}_x) \end{pmatrix} = \sum_I \alpha_I \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\tilde{\theta}_I) \\ e^{-j\omega_I \tilde{s}_I} \mathbf{b}^*(\tilde{\tau}_I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}(\tilde{\theta}_I) \\ e^{-j\omega_I \tilde{s}_I} \mathbf{b}^*(\tilde{\tau}_I) \end{pmatrix}^H \geq 0 \quad (23)$$

因为 $(\tilde{\mathbf{u}}_x, \tilde{\mathbf{P}}) \in S_X^+(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})$, 因此

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{u}}_x, \tilde{\mathbf{P}}) &= \frac{1}{2} (\text{tr}(\tilde{\mathbf{P}}) + \text{tr}(\text{toep}(\tilde{\mathbf{u}}_x))) = \\ &= \sum_I \alpha_I = \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M} \end{aligned} \quad (24)$$

又因为 $\text{SDP}(\mathbf{X})$ 为在集合 $S_X^+(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})$ 中 $g(\mathbf{u}_x, \mathbf{P})$ 的最小值, 可推得 $\text{SDP}(\mathbf{X}) \leq \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M}$ 。

接下来, 证明 $\text{SDP}(\mathbf{X}) \geq \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M}$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \sum_I \alpha_I |e^{j\omega_I s}(f_d, \tilde{\tau}_I) \mathbf{a}(\tilde{\theta}_I) \mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I) = \\ &= \sum_I (|\alpha_I| \sqrt{K}) \mathbf{a}(\tilde{\theta}_I) \frac{\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)}{\|\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)\|} e^{j\omega_I s}(f_d, \tilde{\tau}_I) \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\|\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)\| = \sqrt{K}$, $\left\| \frac{\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)}{\|\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)\|} e^{j\omega_I s}(f_d, \tilde{\tau}_I) \right\| = 1$ 。因为 $\mathbf{a}(\tilde{\theta}_I)$

$\frac{\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)}{\|\mathbf{b}^T(\tilde{\tau}_I)\|} e^{j\omega_I s}(f_d, \tilde{\tau}_I)$ 与文献[29]中的多测量向量 (MMV, multiple measurement vector) 原子具有相同的结构, 所以可以得出 $\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_{\text{MMV}}} = \sqrt{K} \sum_I |\alpha_I|$, $\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M} = \sum_I |\alpha_I| = \frac{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_{\text{MMV}}}}{\sqrt{K}}$ 。

$\text{SDP}(\mathbf{X})$ 与 $\frac{1}{\sqrt{K}} \text{SDP}_{\text{MMV}}(\mathbf{X})$ 有相同的目标函数, 但在 $\text{SDP}(\mathbf{X})$ 半正定矩阵中有一个额外的 $\mathbf{P} \in \mathbb{Z}$ 条件, 因此可得

$$\text{SDP}(\mathbf{X}) \geq \frac{1}{\sqrt{K}} \text{SDP}_{\text{MMV}}(\mathbf{X}) = \frac{\|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_{\text{MMV}}}}{\sqrt{K}} = \|\mathbf{X}\|_{\mathcal{A}_M} \quad (26)$$

证毕。

参考文献:

[1] LUO J H, YANG Y, WANG Z Y, et al. Localization algorithm for underwater sensor network: a review[J]. IEEE Internet of Things Journal, 2021, 8(17): 13126-13144.
 [2] 王丽娟, 杜秀娟, 李冲. 面向水声网络可靠传输的FDR编解码算法[J]. 通信学报, 2020, 41(4): 81-91.
 WANG L J, DU X J, LI C. FDR coding and decoding algorithm for reliable transmission in underwater acoustic network[J]. Journal on Communications, 2020, 41(4): 81-91.

[3] 徐明, 吴佳佳. 基于细粒度极化的隐蔽密钥分发方案[J]. 计算机学报, 2023, 46(1): 147-162.
 XU M, WU J J. Covert secret-key distribution scheme based on fine-grained polarization[J]. Chinese Journal of Computers, 2023, 46(1): 147-162.
 [4] HUA Y. A pencil-MUSIC algorithm for finding two-dimensional angles and polarizations using crossed dipoles[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(3): 370-376.
 [5] HAARDT M, ZOLTOWSKI M D, MATHEWS C P, et al. 2D unitary ESPRIT for efficient 2D parameter estimation[C]//Proceedings of the 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 1995: 2096-2099.
 [6] 王威鹏, 国月皓, 黄梦醒, 等. 互耦条件下MIMO雷达非圆目标稳健角度估计方法[J]. 通信学报, 2019, 40(7): 144-150.
 WANG X P, GUO Y H, HUANG M X, et al. Robust angle estimation method for noncircular targets in MIMO radar with mutual coupling[J]. Journal on Communications, 2019, 40(7): 144-150.
 [7] SHAN T J, WAX M, KAILATH T. On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1985, 33(4): 806-811.
 [8] WEN F, LIU P L, WEI H C, et al. Joint azimuth, elevation, and delay estimation for 3-D indoor localization[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2018, 67(5): 4248-4261.
 [9] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
 [10] CHI Y J, PEZESHKI A, SCHARF L, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing[C]//Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 2010: 3930-3933.
 [11] DUARTE M F, BARANIUK R G. Spectral compressive sensing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2013, 35(1): 111-129.
 [12] BHASKAR B N, TANG G G, RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(23): 5987-5999.
 [13] YANG Z, XIE L H. On gridless sparse methods for line spectral estimation from complete and incomplete data[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(12): 3139-3153.
 [14] TANG G G, BHASKAR B N, SHAH P, et al. Compressed sensing off the grid[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(11): 7465-7490.
 [15] YANG Z, XIE L H, STOICA P. Vandermonde decomposition of multi-level Toeplitz matrices with application to multidimensional super-resolution[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2016, 62(6): 3685-3701.
 [16] CHI Y J, CHEN Y X. Compressive two-dimensional harmonic retrieval via atomic norm minimization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(4): 1030-1042.
 [17] ZHANG Z, WANG Y, TIAN Z. Efficient two-dimensional line spectrum estimation based on decoupled atomic norm minimization[J]. Signal Processing, 2019, 163: 95-106.
 [18] CANDÈS E J, FERNANDEZ-GRANDA C. Towards a mathematical theory of super-resolution[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2014, 67(6): 906-956.
 [19] ZHOU C W, GU Y J, FAN X, et al. Direction-of-arrival estimation for

- coprime array via virtual array interpolation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(22): 5956-5971.
- [20] WANG M Z, ZHANG Z, NEHORAI A. Grid-less DOA estimation using sparse linear arrays based on Wasserstein distance[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(6): 838-842.
- [21] ZHENG Z, HUANG Y X, WANG W Q, et al. Direction-of-arrival estimation of coherent signals via coprime array interpolation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 27: 585-589.
- [22] BELLONI F, RICHTER A, KOIVUNEN V. DoA estimation via manifold separation for arbitrary array structures[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(10): 4800-4810.
- [23] RUBSAMEN M, GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: from manifold separation to Fourier domain MUSIC methods[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(2): 588-599.
- [24] CHEN P, CHEN Z M, CAO Z X, et al. A new atomic norm for DOA estimation with gain-phase errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020, 68: 4293-4306.
- [25] MAHATA K, HYDER M M. Frequency estimation from arbitrary time samples[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(21): 5634-5643.
- [26] LANDAU H J, POLLAK H O. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-III: the dimension of the space of essentially time- and band-limited signals[J]. Bell System Technical Journal, 1962, 41(4): 1295-1336.
- [27] WAGNER M, PARK Y, GERSTOFT P. Gridless DOA estimation and root-MUSIC for non-uniform linear arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2021, 69: 2144-2157.
- [28] BARAL A B, TORLAK M. Joint Doppler frequency and direction of arrival estimation for TDM MIMO automotive radars[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2021, 15(4): 980-995.
- [29] YANG Z, XIE L H. Exact joint sparse frequency recovery via optimization methods[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(19): 5145-5157.

[作者简介]



徐明 (1977-), 男, 安徽马鞍山人, 博士, 上海海事大学教授, 主要研究方向为无线通信网络、阵列信号处理、网络空间安全等。



唐倩 (2000-), 女, 江西景德镇人, 上海海事大学硕士生, 主要研究方向为无线通信网络、阵列信号处理、网络空间安全。