

# 基于量子开关的量子纠缠分发基本限制突破

许瑞青<sup>1,2</sup>, 周日贵<sup>1,2</sup>, 李尧翀<sup>1,2</sup>

(1. 上海海事大学信息工程学院, 上海 201306; 2. 上海海事大学智能信息处理与量子智能计算研究中心, 上海 201306)

**摘要:** 为解决纠缠分发中量子信息在信道中传输极易出现信息丢失导致纠缠分发速率低的问题, 提出利用量子开关传输量子信息。针对量子开关的信息传输能力, 设计基于量子开关的自适应纠缠分发协议, 确定基于量子开关的两步纠缠分发容量; 利用信道的量子隐形传态模拟方法推导出容量上界, 并利用哈希不等式推导出容量下界。仿真结果表明, 所提方法的容量下界基本上突破了传统量子信道的容量上界, 为实现量子信息的高速率传输提供了可行思路。

**关键词:** 量子开关; 两步纠缠分发容量; 纠缠相对熵; 相干信息

中图分类号: TN911

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2024177

## Breaking fundamental limits of quantum entanglement distribution with quantum switch

XU Ruiqing<sup>1,2</sup>, ZHOU Rigui<sup>1,2</sup>, LI Yaochong<sup>1,2</sup>

1. The College of Information Engineering, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China

2. Research Center of Intelligent Information Processing and Quantum Intelligent Computing, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China

**Abstract:** To solve the problem of low efficiency of entanglement distribution caused by quantum information easily lost in quantum channels, quantum switch was proposed to transmit quantum information. Considering the information transmission capacity of quantum switch, an adaptive entanglement distribution protocol with quantum switch was proposed and two-way entanglement distribution capacity with quantum switch was correspondingly derived. Then the tighter upper bound of channel capacity was derived by using teleportation simulation of quantum channel, the tighter lower bound was derived on the basis of Hash inequality. Simulation result shows that the lower bound of channel capacity in the proposed method generally surpasses the upper bound of which in the traditional quantum channel, providing a feasible thought for delivering high-rate quantum information.

**Keywords:** quantum switch, two-way entanglement distribution capacity, relative entropy of entanglement, coherent information

### 0 引言

随着量子通信技术的发展, 量子通信领域正逐步向网络实现演化, 其中技术较成熟的量子密钥分发技术已被应用到城际网络中以实现高安全的量子

通信<sup>[1-2]</sup>; 而量子隐形传态技术因能够利用两通信节点间共享的量子纠缠实现量子信息的远距离瞬时传输<sup>[3]</sup>, 已成为量子互联网构建图景中实现量子信息交互的首选技术。由于量子纠缠的易破坏性, 两通

收稿日期: 2024-04-07; 修回日期: 2024-09-14

通信作者: 周日贵, rgzhou@shmtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62172268, No.62302289); 上海市科技基金资助项目 (No.21JC1402800, No.23YF1416200)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (No.62172268, No.62302289), The Shanghai Science and Technology Project (No.21JC1402800, No.23YF1416200)

信节点间的纠缠链路质量会随着链路距离的增加而降低,甚至出现纠缠消失现象,所以需要在两通信节点间部署量子中继器以确保建立远距离纠缠链路<sup>[4]</sup>。然而,考虑到经济效益,量子中继器又该如何部署才能使量子互联网的构建成本最低、通信性能最优?因此,能否优化两通信节点间可以获得的最终纠缠分发速率是实现量子网络通信的关键问题之一。

衡量量子信道分发纠缠能力大小的信息量是纠缠分发容量,定义为每使用一次信道两通信节点间能有效生成纠缠比特的最大速率。考虑到纠缠纯化操作能够有效提高两通信节点间生成的纠缠态质量,所以在每完成一次纠缠粒子在量子信道中的传输后,辅以局部操作和两步经典通信 (LOCC, local operations and two-way classical communication),可确定两通信节点间的最终纠缠分发速率,即两步纠缠分发容量。文献[5]通过建立纠缠纯化协议与量子纠错编码之间的关系,确定在局部操作和两步经典通信辅助下获得的两步纠缠分发容量是纠缠分发容量的上界,这意味着两步纠缠分发容量是网络中任意两相邻节点每使用一次量子信道最终能共享的最大纠缠信息量,是解决远距离纠缠链路中量子中继器部署问题的关键。

文献[6]指出相比于纠缠分发容量,利用两步纠缠分发容量的纠缠分发协议不涉及编码和解码操作,仅需要在接收方与发送方之间使用多轮自适应局部操作和经典通信。文献[7]定义了与相干信息量对称的反向相干信息量,确定两步纠缠分发容量的下界为相干信息和反向相干信息中的较大者。文献[8]确定两步纠缠分发容量的上界为量子信道的压缩纠缠,但是该上界太大以至于无法缩小与最优下界之间的差距。文献[9]结合纠缠相对熵和量子隐形传态技术确定了两步纠缠分发容量的单字符紧上界,该上界被称为皮兰多拉-劳伦扎-奥塔维亚尼-班奇 (PLOB, Pirandola-Laurenza-Ottaviani-Banchi) 上界,且基于与文献[7]中给定下界的一致性,推导出了一些常见量子信道下两步纠缠分发容量的闭式表达,其中包括证明了光纤及自由空间这类玻色子高斯信道的两步纠缠分发容量为  $-\log(1 - \eta)$ , 参数  $\eta$  为有损信道的透射率<sup>[10]</sup>。当两通信节点之间相距较远,即透射率  $\eta \approx 0$  时,发现每使用一次信道在两通信节点间最多可共享  $1.44\eta$  个纠缠比特。该两步纠缠分发容量是在传统量子信息论下只有利

用量子中继器才能突破的基本限制,是在远距离量子纠缠分发中部署量子中继器的基本评判标准。

然而上述关于两步纠缠分发容量的讨论均是以传统量子信息论作为研究基础,即给定量子信道的传输模式与经典信道类似,表现为信道的经典因果性。由于待传输的量子信息具有量子叠加或纠缠特性,量子信息在具有经典因果性的量子信道中传输势必会造成信息的丢失。因此,对量子信道传输模式进行范式转变是提高信道量子信息传输能力的重要手段。

文献[11]首次提出量子开关的概念,即量子力学允许量子信道以 2 个噪声信道不同因果顺序的量子叠加形式存在,但并未对其信息传输能力进行分析。文献[12]提出当量子信道表现为 2 个完全去极化信道不同因果顺序的量子叠加时,量子信道可以以非零的速率传输经典信息,然而当量子信道表现为由 2 个完全去极化信道的任一确定因果顺序连接时则无法传输任何经典信息,这一现象称为量子开关作用下霍列沃 (Holevo) 信息的因果激活。文献[13]提出当量子信道表现为 2 个量子容量为零的纠缠破坏信道不同因果顺序的量子叠加时,在所有给定的输入下可获得最大的量子容量,这一现象称为量子开关作用下量子容量的因果激活。文献[14]利用量子密集编码推导了基于量子开关的纠缠辅助信道容量,进一步验证了因果激活现象。文献[15]确定了基于量子开关的量子容量上下界,并指出在量子开关作用下的信息传输质量相比于无量子开关具有明显的优势。除了理论研究,量子开关的实验实现也取得了突破性进展<sup>[16-20]</sup>。因此,将量子开关应用于量子信道不仅拓展了量子信息论,更对如何优化两通信节点间的最终纠缠分发速率提供了切实可行的新思路。

文献[21]提出在量子隐形传态协议的纠缠分发阶段应用量子开关,发现量子隐形传态的传输质量可以按一定的概率成为无噪通信过程,且该概率会随着量子信道中组合信道噪声强度的增强逐渐趋近于 1。文献[22]在上述基于量子开关的纠缠分发模型基础上,将量子开关与纠缠纯化技术相结合,论证了相比于无量子开关的纠缠分发过程,量子开关作用下两通信节点间生成的基本纠缠链路在局部操作和两步经典通信下可获得更高的纠缠保真度。不过该文献仅对执行 3 次纠缠纯化后点对点之间可确定的纠缠生成质量进行分析,无法确定在局部操作

和两步经典通信辅助下,量子信道的最终纠缠分发能力。因此,借助文献[7]中两步纠缠分发容量的 PLOB 上界分析方法,确定量子开关作用下两通信节点间可共享的最终纠缠分发率,对未来高效量子通信网络的实现具有重要的理论意义和实际价值。

本文的主要研究工作如下。

1) 利用基本的数学变换知识将量子开关按概率分解成多个传统量子信道,设计基于量子开关的自适应纠缠分发协议,并确定基于量子开关的两步纠缠分发容量。

2) 基于两步容量的 PLOB 上界分析方法,将基于量子开关的两步纠缠分发容量的上界问题转化为量子信道的纠缠相对熵求解问题,通过寻找距离纠缠混合态最近的可分态,确定纠缠相对熵的闭式表达。基于哈希不等式,将基于量子开关的两步纠缠分发容量下界问题转化为量子信道的相干信息或反向相干信息中较大值的求解问题。

3) 仿真结果表明,量子开关作用下两步纠缠分发容量的下界在很大程度上突破了传统无量子开关下两步纠缠分发容量的上界,证明了量子开关对提升量子信道的纠缠分发能力、突破无量子中继器下通信容量的基本限制具有重要的积极意义。

## 1 基础知识

### 1.1 两步纠缠分发容量的 PLOB 上界

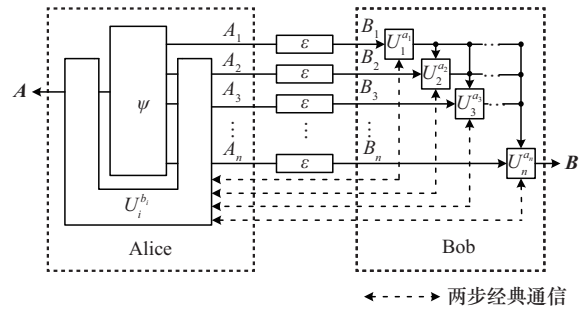
假设通信方 Alice 初始在其寄存器中存储了  $n$  对两粒子最大纠缠态  $|\Psi_{A_1 A_2, \dots, A_n}\rangle$ , 其中  $A$  为与每个量子系统  $A_i$  相纠缠的一组量子比特,通信方 Bob 初始在其寄存器中存储了一个单粒子量子系统。通信方 Alice 中的量子系统  $A_i$  每在量子信道  $\varepsilon$  中完成一次到通信方 Bob 中的传输后,通信双方需要执行一轮量子操作  $\{U_i^a, U_i^b | i = 1, 2, \dots, n\}$  和两步经典通信来更新他们的本地寄存器,如图 1(a)所示。为了简化分析通信方各自执行的不同量子操作,通信方 Alice 与 Bob 执行的每一轮量子操作  $\{U_i^a, U_i^b | i = 1, 2, \dots, n\}$  及两步经典通信可直接用一个自适应的 LOCC 操作  $L_i$  来表示<sup>[9]</sup>,即 Alice 每分发一个纠缠粒子  $A_i$  到 Bob 端, Alice 与 Bob 便执行一次自适应的 LOCC 操作来更新各自本地寄存器的状态,如图 1(b)所示。那么,在完成了  $n$  次传输后,通信方 Alice 与 Bob 之间共享的输出态  $w_{AB}^n$  就

完全依赖于 LOCC 序列  $L = \{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ 。已知在纠缠蒸馏协议中,利用 LOCC 操作通过消耗  $n - m$  个纠缠混合态  $M$ , 可从  $n$  个纠缠混合态  $M$  中提取出  $m$  个更高保真度的纠缠态  $M'$ , 且随着  $n$  逐渐增大,纠缠态  $M'$  的保真度会逐渐趋近于 1, 此时可确定纠缠蒸馏协议的提取率为  $R_n = \frac{m}{n}$ 。若  $M$  表现为爱因斯坦-波尔-罗森 (EPR) 纠缠态在有损信道  $\varepsilon$  中完成纠缠分发后获得的纠缠混合态,那么经过  $n$  次信道分发后,  $R_n$  可定义为每使用一次信道通信双方之间可有效生成的渐近纠缠比特数。显然,利用 LOCC 操作,在信道的使用次数  $n$  趋近于无穷大时,通信双方共享的纠缠态为 EPR 纠缠态,此时可获得理想情况下通信双方之间可有效生成的纠缠比特数为  $nR_n$ 。因此,当输出态  $w_{AB}^n$  无限接近于具有  $nR_n$  个纠缠比特的目标态  $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|^{\otimes nR_n}$ , 即满足条件

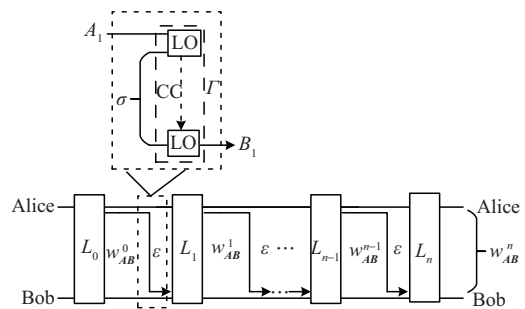
$$\left\| w_{AB}^n - |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|^{\otimes nR_n} \right\|_1 \leq \delta \quad (1)$$

时,有  $R_n$  为该自适应纠缠分发协议的速率,其中  $|\Phi^+\rangle$  为两粒子最大纠缠态。因此,通过对信道的使用次数  $n$  取渐近极限以及最大化 LOCC 序列  $L$ , 可获得信道的通用两步纠缠分发容量为

$$E_2(\varepsilon) := \sup_L \lim_n R_n \quad (2)$$



(a) 通用纠缠分发模型



(b) LOCC辅助下的自适应纠缠分发模型

图1 传统信道下的纠缠分发模型

根据弱逆理论<sup>[9]</sup>, 通用两步纠缠分发容量的上界可由纠缠相对熵 (REE, relative entropy of entanglement) 界定, 即

$$E_2(\varepsilon) \leq E_R^*(\varepsilon) := \sup_L \lim_n \frac{E_R(w_{AB}^n)}{n} \quad (3)$$

其中,  $E_R^*(\varepsilon)$  定义为通过对信道的使用次数  $n$  取渐近极限以及优化所有的自适应 LOCC, 以计算输出态  $w_{AB}^n$  的纠缠相对熵  $E_R(w_{AB}^n)$ 。  $E_R(w_{AB}^n)$  定义为量子态  $w_{AB}^n$  与其最近可分态  $\rho_s$  之间的最小距离, 用于度量量子态  $w_{AB}^n$  中包含的纠缠信息量。

为了简化该上界, 由于量子隐形传态是利用量子纠缠资源并辅以 LOCC 操作来实现量子态的瞬时传输, 可以很好地匹配自适应纠缠分发协议中的 LOCC 操作, 因此当纠缠资源为混合态  $\sigma$  时利用 LOCC 操作  $\mathcal{T}$  实现量子态  $\rho$  的隐形传输可以有效模拟量子态  $\rho$  在量子信道  $\varepsilon$  中的传输, 数学表征为

$$\mathcal{T}(\rho \otimes \sigma) = \varepsilon(\rho) \quad (4)$$

此时, 可将满足式(4)的量子信道称为  $\sigma$ -可延伸信道 ( $\sigma$ -SC,  $\sigma$ -stretchable channel)。且当资源混合态  $\sigma$  与量子信道  $\varepsilon$  满足条件  $\sigma = (\mathbf{I} \otimes \varepsilon)\Phi^+$ , 即  $\sigma$  表现为量子信道  $\varepsilon$  的崔 (Choi) 矩阵时, 可将  $\sigma$ -可延伸信道进一步称为 Choi-可延伸信道 (Choi-SC, choi-stretchable channel), 其中  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。

基于量子信道的 LOCC 模拟  $S(\varepsilon) = (\mathcal{T}, \sigma)$ , 可建立输入  $w_{AB}^{i-1}$  与输出  $w_{AB}^i$  之间的关系, 即

$$w_{AB}^i = \Delta_i(w_{AB}^{i-1} \otimes \sigma) \quad (5)$$

其中,  $\Delta_i$  包含  $\mathcal{T}$  和  $L_i$  这 2 个模块的 LOCC 操作。所以在进行  $n$  次信道模拟后, 通信双方获得的输出态  $w_{AB}^n$  可表示为

$$w_{AB}^n = \Delta_n \circ \Delta_{n-1} \circ \dots \circ \Delta_1(w_{AB}^0 \otimes \sigma^{\otimes n}) \quad (6)$$

由于通信方 Alice 与 Bob 的初始态  $w_{AB}^0$  是可分态, 该量子态的制备可包含在 LOCC 操作内, 因此通过对复合 LOCC 序列  $\{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$  中所有的局部测量取平均值, 可获得一个迹保持的 LOCC 操作  $\bar{L}$ , 此时两通信方最终获得的输出态  $w_{AB}^n$  可表示为

$$w_{AB}^n = \bar{L}(\sigma^{\otimes n}) \quad (7)$$

如果量子信道表现为 Choi-SC, 那么式(7)可进一步表示为

$$w_{AB}^n = \bar{L}(\rho_\varepsilon^{\otimes n}) \quad (8)$$

其中,  $\rho_\varepsilon = \mathbf{I} \otimes \varepsilon(\Phi^+)$  是量子信道  $\varepsilon$  的 Choi 矩阵。利用纠缠相对熵在迹保持 LOCC 操作下的单调性,

基于式(3)获得通用两步纠缠分发容量的 REE 单字符上界, 即<sup>[9]</sup>

$$E_2(\varepsilon) \leq E_R(\sigma) \quad (9)$$

当量子信道表现为 Choi-SC 时, 式(9)可进一步表示为

$$E_2(\varepsilon) \leq E_R(\rho_\varepsilon) \quad (10)$$

利用量子信道的 LOCC 模拟, 将量子信道替换为合适的资源态, 并基于该信道模拟方法将自适应纠缠分发协议转化成一个更简单的块协议以获得两步纠缠分发容量的单字符紧上界, 该方法对两通信节点最终可获得的纠缠分发速率提供了更为准确的度量, 是构建实际高效量子通信网络的重要理论依据。

### 1.2 量子开关

量子开关是一个可以实现量子信道二次量子化的新型量子设备<sup>[11]</sup>, 其基本思想是通过对该设备中的量子控制系统设置不同的量子状态以控制量子粒子在量子信道中遍历时所对应的不同传输路径。具体来说, 给定一个量子信道由 2 个噪声信道  $\eta(\cdot)$  和  $\Lambda(\cdot)$  组成, 当量子控制系统设为量子态  $|0\rangle$  时, 量子开关可以实现一个量子信息载体按因果序依次在噪声信道  $\eta(\cdot)$  和噪声信道  $\Lambda(\cdot)$  中的演化, 即此时量子信息载体的传输路径为  $\eta(\cdot) \rightarrow \Lambda(\cdot)$ ; 当量子控制系统设为量子态  $|1\rangle$  时, 量子开关可以实现一个量子载体按因果序依次在噪声信道  $\Lambda(\cdot)$  和噪声信道  $\eta(\cdot)$  中的演化, 即此时量子信息载体的传输路径表现为  $\Lambda(\cdot) \rightarrow \eta(\cdot)$ ; 而当量子控制系统设为单粒子叠加态  $|+\rangle$  时, 量子开关可以实现一个量子载体同时遍历  $\eta(\cdot) \rightarrow \Lambda(\cdot)$  和  $\Lambda(\cdot) \rightarrow \eta(\cdot)$  这两条传输路径, 此时量子信息载体的传输路径表现为 2 个噪声信道不同因果序的相干叠加。单粒子量子系统在量子开关作用下的演化模型如图 2 所示。

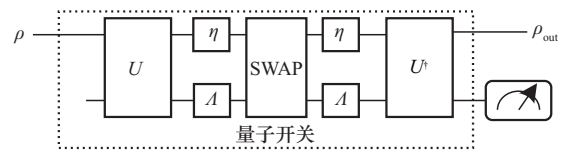


图 2 单粒子量子系统在量子开关作用下的演化模型

若输入为单粒子量子系统  $\rho$ , 量子控制系统的量子状态为  $\rho_c$ , 那么量子开关作用下获得的全局输出态可表示为

$$\rho_{A,\eta,\rho_c} = \sum_{ij} W_{ij}(\rho \otimes \rho_c) W_{ij}^\dagger \quad (11)$$

其中,  $W_{ij}$  是量子开关的克劳斯 (Kraus) 算子,  $W_{ij}^\dagger$  是算子  $W_{ij}$  的共轭转置形式。量子开关的 Kraus 算子  $W_{ij}$  可表示为

$$W_{ij} = E_i F_j \otimes |0\rangle_c \langle 0| + F_j E_i \otimes |1\rangle_c \langle 1| \quad (12)$$

其中,  $E_i$  和  $F_j$  分别为噪声信道  $A(\cdot)$  和噪声信道  $\eta(\cdot)$  的 Kraus 算子。由于全局输出态  $\rho_{A,\eta,\rho_c}$  依赖于输出态  $\rho_{\text{out}}$  和量子控制系统, 因此想要获得量子输入态为  $\rho$  时所对应的量子开关作用下的输出态  $\rho_{\text{out}}$ , 还需要进一步对全局输出态  $\rho_{A,\eta,\rho_c}$  中的量子控制系统进行量子相干测量。

由于量子开关表现为 2 个噪声信道不同因果序的相干叠加, 该量子信道表现形式无法直接利用量子隐形传态来进行信道模拟, 因此如何对量子开关进行操作以满足 PLOB 中信道模拟的条件是研究基于量子开关的两步纠缠分发容量时需要解决的首要问题。

## 2 通信系统模型

### 2.1 量子开关下的信道分解

量子信息载体在量子信道中的传输路径依赖于量子开关中的量子控制系统, 因此为了能够使量子信道表现为不同噪声信道因果序的相干叠加形式, 一般将量子控制系统的状态设置为单粒子叠加态  $\rho_c = |+\rangle_c \langle +|$ 。

给定任意 2 种噪声信道  $A(\cdot)$  和  $\eta(\cdot)$  的 Kraus 算子  $E_i$  和  $F_j$ , 式(11)可展开为

$$\begin{aligned} \rho_{A,\eta,|+\rangle_c \langle +|} &= \frac{1}{2} \sum_{ij} E_i F_j \rho (E_i F_j)^\dagger \otimes |0\rangle_c \langle 0| + \\ &\frac{1}{2} \sum_{ij} E_i F_j \rho (F_j E_i)^\dagger \otimes |0\rangle_c \langle 1| + \\ &\frac{1}{2} \sum_{ij} F_j E_i \rho (E_i F_j)^\dagger \otimes |1\rangle_c \langle 0| + \\ &\frac{1}{2} \sum_{ij} F_j E_i \rho (F_j E_i)^\dagger \otimes |1\rangle_c \langle 1| \quad (13) \end{aligned}$$

为了获得输入态  $\rho$  与输出态  $\rho_{\text{out}}$  之间的一一映射关系, 本文需要在量子开关的全局输出态中对量子控制系统执行量子相干测量, 即  $\{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$  测量。基于  $|+\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_c + |1\rangle_c)$ ,  $|-\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_c -$

$|1\rangle_c)$ , 利用基础的数学变换知识将式(13)中的量子控制比特  $|0\rangle_c$  和  $|1\rangle_c$  用正交基  $\{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$  来表示, 则式(13)可转化为

$$\begin{aligned} \rho_{A,\eta,|+\rangle_c \langle +|} &= |+\rangle_c \langle +| \otimes \frac{1}{4} \sum_{ij} \{E_i, F_j\} \rho \{E_i, F_j\}^\dagger + \\ &|-\rangle_c \langle -| \otimes \frac{1}{4} \sum_{ij} [E_i, F_j] \rho [E_i, F_j]^\dagger + \\ &|+\rangle_c \langle -| \otimes \frac{1}{4} \sum_{ij} \{E_i, F_j\} \rho [E_i, F_j]^\dagger + \\ &|-\rangle_c \langle +| \otimes \frac{1}{4} \sum_{ij} [E_i, F_j] \rho \{E_i, F_j\}^\dagger \quad (14) \end{aligned}$$

其中,  $\{E_i, F_j\} = E_i F_j + F_j E_i$ ,  $[E_i, F_j] = E_i F_j - F_j E_i$ 。由于描述量子测量的测量算子  $M_i$  必须是厄米算子且满足  $M_i^2 = M_i^{[23]}$ , 使得量子控制系统只能用测量算子  $M_0 = |+\rangle_c \langle +|$  和  $M_1 = |-\rangle_c \langle -|$  来进行观测, 因此从量子系统的实际可观测角度来分析, 式(14)可简化为

$$\begin{aligned} \rho_{A,\eta,|+\rangle_c \langle +|} &= |+\rangle_c \langle +| \otimes \frac{1}{4} \sum_{ij} \{E_i, F_j\} \rho \{E_i, F_j\}^\dagger + \\ &|-\rangle_c \langle -| \otimes \frac{1}{4} \sum_{ij} [E_i, F_j] \rho [E_i, F_j]^\dagger \quad (15) \end{aligned}$$

显然, 当对全局输出态中的量子控制系统执行不同的  $X$  基测量操作时, 可相应的获得输入态  $\rho$  在量子开关作用下的不同演化结果。将输入态与不同输出态之间的一一映射关系用不同的量子信道来表征, 式(15)可进一步表示为

$$\begin{aligned} \rho_{A,\eta,|+\rangle_c \langle +|} &= \\ &|+\rangle_c \langle +| \otimes \lambda_+ C_+(\rho) + |-\rangle_c \langle -| \otimes \lambda_- C_-(\rho) \quad (16) \end{aligned}$$

其中, 量子信道  $C_+(\rho) = \frac{1}{4\lambda_+} \sum_{ij} \{E_i, F_j\} \rho \{E_i, F_j\}^\dagger$  和量子信道  $C_-(\rho) = \frac{1}{4\lambda_-} \sum_{ij} [E_i, F_j] \rho [E_i, F_j]^\dagger$  均满足量子信道的线性、保迹性和完全正定性条件。通过对量子控制系统进行  $\{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$  测量, 量子开关可以分别按概率  $\lambda_+$  变成  $C_+(\rho)$ , 按概率  $\lambda_-$  变成  $C_-(\rho)$ 。由此, 本文发现量子开关的信道分解是基于对量子控制系统的量子测量实现的, 并不能基于经典物理的某些组合或变换手段来实现, 从这一角度也进一步证明了量子开关的量子特性。

由于在合适的预处理和后处理操作下, 任意的

量子泡利信道都可以通过量子比特翻转信道和量子相位翻转信道得到<sup>[24]</sup>, 因此为了简化分析且不失一般性, 本文假定用于传输纠缠粒子的量子信道由量子比特翻转信道和量子相位翻转信道组成, 并分别用符号  $A(\cdot)$  表示量子比特翻转信道,  $\eta(\cdot)$  表示量子相位翻转信道。

量子比特翻转信道  $A(\cdot)$  表现为信道内部噪声将量子比特的状态按概率  $p$  从  $|0\rangle$  翻转到  $|1\rangle$  (或者从  $|1\rangle$  翻转到  $|0\rangle$ ), 描述该信道特性的 Kraus 算子为

$$E_0 = \sqrt{1-p} I, \quad E_1 = \sqrt{p} \sigma_x \quad (17)$$

量子相位翻转信道  $\eta(\cdot)$  则是信道内部噪声将量子比特态的基态  $|1\rangle$  按概率  $q$  变成  $-|1\rangle$ , 描述该信道特性的 Kraus 算子为

$$F_0 = \sqrt{1-q} I, \quad F_1 = \sqrt{q} \sigma_z \quad (18)$$

其中,  $I$ 、 $\sigma_x$  和  $\sigma_z$  为泡利矩阵, 分别表示为  $I=[1 \ 0; 0 \ 1]$ ,  $\sigma_x=[0 \ 1; 1 \ 0]$ ,  $\sigma_z=[1 \ 0; 0 \ -1]$ ; 参数  $p, q \in [0, 1]$  分别表示为量子比特翻转信道  $A(\cdot)$  和量子相位翻转信道  $\eta(\cdot)$  的错误概率。将 2 个噪声信道的 Kraus 算子表达式代入式(16)后, 通过对量子控制系统执行  $\{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$  测量, 本文可获得当量子开关由量子比特翻转噪声和量子相位翻转噪声组成时, 量子开关可按概率分解为

$$S_{(A,\eta,|+\rangle_c,|-\rangle_c)}(\rho) = \begin{cases} C_+^{A,\eta}(\rho), \lambda_+ \\ C_-^{A,\eta}(\rho), \lambda_- \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $S_{(A,\eta,|+\rangle_c,|-\rangle_c)}(\cdot): \rho \mapsto \rho_{A,\eta,|+\rangle_c,|-\rangle_c}$  是量子开关, 为一个保迹且完全正的线性映射;  $\lambda_+ = 1 - pq$ ,  $\lambda_- = pq$ ; 输入态  $\rho$  在量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  下会转换成如下输出量子态

$$C_-^{A,\eta}(\rho) = \sigma_y \rho \sigma_y \quad (20)$$

其中,  $\sigma_y=[0 \ -i; i \ 0]$ ,  $i$  为虚数。输入态  $\rho$  在量子信道  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  下则会转换成如下输出量子态

$$C_+^{A,\eta}(\rho) = a_1 \rho + a_2 \sigma_z \rho \sigma_z + a_3 \sigma_x \rho \sigma_x \quad (21)$$

其中,  $a_1 = \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}$ ,  $a_2 = \frac{(1-p)q}{1-pq}$ ,  $a_3 = \frac{p(1-q)}{1-pq}$ 。

## 2.2 基于量子开关的自适应纠缠分发协议

假设通信方 Alice 的寄存器中存在量子粒子  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , 并与一组量子比特  $A$  构成了  $n$  对两粒

子最大纠缠态  $|\Psi_{A|A_1, A_2, \dots, A_n}\rangle$ , 基于量子开关的自适应纠缠分发协议的实现主要包括以下步骤。

1) 将 Alice 中的第一个纠缠粒子  $A_1$  射入量子开关设备  $S_{(A,\eta,|+\rangle_c,|-\rangle_c)}$  以实现纠缠粒子同时遍历由量子比特翻转信道和量子相位翻转信道组成的 2 种不同因果序的传输路径。

2) 在量子开关输出端通过对量子控制系统执行  $|+\rangle_c$  或  $|-\rangle_c$  基测量以在通信方 Bob 的寄存器  $M_1$  中存储相应的纠缠粒子  $B_1^{|+\rangle_c}$  或  $B_1^{|-\rangle_c}$ , 如图 3 所示。

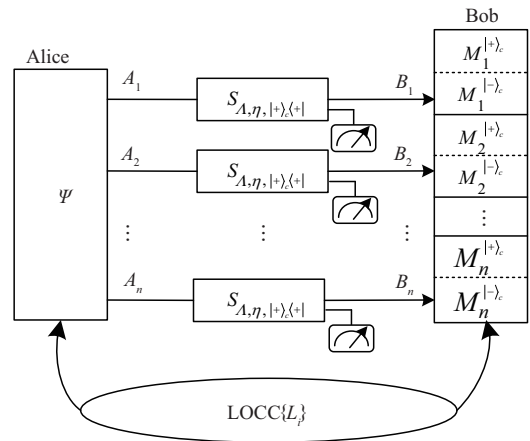


图 3 基于量子开关的自适应纠缠分发协议模型

3) 在通信方 Alice 与 Bob 之间初步生成了量子态  $\rho_{A|B_1, A_2, \dots, A_n}^x, x = \{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$  后, 通过在通信双方之间执行一轮自适应 LOCC 操作  $L_1$ , 通信双方之间共享的量子态则会转化为一个新的量子态  $W_{A|B_1, A_2, \dots, A_n}^x, x = \{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$ 。

4) 按照上述步骤将 Alice 中的剩余粒子  $\{A_2, \dots, A_n\}$  依次射入量子开关设备, 在完成第  $n$  次传输后, 通过对量子控制系统进行  $X$  测量以及通信双方后续的自适应 LOCC 操作  $L_n$ , Alice 与 Bob 之间可获得的最终量子态为  $W_{A|B_1, B_2, \dots, B_n}^x, x = \{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$ 。将通信方 Bob 寄存器中的  $n$  个粒子  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  用一组量子比特  $B$  表示, 则可获得在最终量子态  $W_{AB}^x, x = \{|+\rangle_c, |-\rangle_c\}$  无限接近于  $nR_s^{n_x}$  个两粒子最大纠缠态  $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$  时, 有量子开关下的自适应纠缠分发速率为  $R_s^{n_x}$ 。通过对量子开关的使用次数  $n$  取渐近

极限以及优化每轮的自适应 LOCC 操作, 可确定量子开关下通用的两步纠缠分发容量  $E_2(S)$  为

$$E_2(S) := \sup_L \lim_n R_s^{n,x}, x = \left\{ |+\rangle_c, |-\rangle_c \right\} \quad (22)$$

在基于量子开关的自适应纠缠分发协议中需要注意的是, 每次 Alice 与 Bob 之间生成的量子态是唯一的, 具体生成的是哪一个量子态取决于量子控制系统中测量基的选择。

### 2.3 基于量子开关的两步纠缠分发容量

结合基于量子开关的自适应纠缠分发协议的描述与量子开关  $S_{(A,\eta,|+\rangle_c,|-\rangle_c)}$  的信道分解方法, 基于量子开关的自适应纠缠分发协议模型可以分解为如图 4 所示的描述, 具体如下。

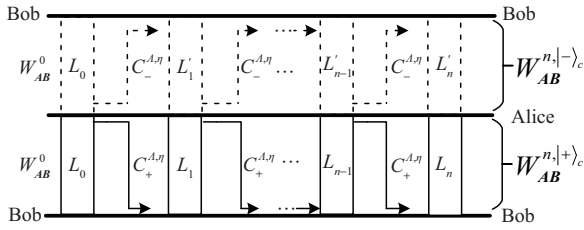


图4 基于量子开关的自适应纠缠分发协议模型分解

1) 将通信方 Alice 与 Bob 各自寄存器中的量子态利用一个 LOCC 操作  $L_0$  来获得初始可分态  $W_{AB}^0$ 。

2) 在量子开关的  $n$  次使用中对量子控制系统执行  $|-\rangle_c$  基测量的前提条件下, Alice 中的每个纠缠粒子  $A_i, i = 1, \dots, n$  依次经过量子信道  $C_-^{A,\eta}(\cdot)$  传输至 Bob 端, 并在每次传输后执行一轮自适应 LOCC 操作  $L_i$  来更新通信双方寄存器中的状态, 所以, 在完成了  $n$  次传输后, Alice 与 Bob 之间获得的最终量子态为  $W_{AB}^{n,-}$ 。当最终量子态无限接近于目标态

$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|^{\otimes n R_s^{n,-}}$  时, 可获得量子控制系统每执行一次  $|-\rangle_c$  基测量操作即每完成一次纠缠粒子在信道  $C_-^{A,\eta}(\cdot)$  中的传输时, 依赖于 LOCC 序列  $L = \{L_0, L_1, \dots, L_n\}$  的自适应纠缠分发协议的速率为  $R_s^{n,-}$ 。此时通过对量子信道  $C_-^{A,\eta}(\cdot)$  的使用次数  $n$  取渐近极限以及对 LOCC 序列  $L$  进行优化可获得量子信道  $C_-^{A,\eta}(\cdot)$  的两步纠缠分发容量为

$$E_2(C_-^{A,\eta}) := \sup_L \lim_n R_s^{n,-} \quad (23)$$

3) 在量子开关的  $n$  次使用中对量子控制系统执

行  $|+\rangle_c$  基测量的前提条件下, Alice 中的每个纠缠粒子  $A_i, i = 1, \dots, n$  依次通过量子信道  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  传输至 Bob 端, 并在每次传输后执行一轮自适应 LOCC 操作  $L_i$  来更新通信双方寄存器中的状态。所以, 在完成了  $n$  次传输后, Alice 与 Bob 之间可获得的最终量子态为  $W_{AB}^{n,+}$ 。当最终量子态无限接近于目标态  $|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|^{\otimes n R_s^{n,+}}$  时, 可获得每对量子控制系统执行一次  $|+\rangle_c$  基测量操作即每完成一次纠缠粒子在信道  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  中的传输时, 依赖于 LOCC 序列  $L' = \{L_0, L'_1, \dots, L'_n\}$  的自适应纠缠分发协议的速率为  $R_s^{n,+}$ 。此时通过对量子信道  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  的使用次数  $n$  取渐近极限以及对 LOCC 序列  $L'$  进行优化可获得量子信道  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  的两步纠缠分发容量为

$$E_2(C_+^{A,\eta}) := \sup_{L'} \lim_n R_s^{n,+} \quad (24)$$

由此可知, 基于量子开关的两步纠缠分发容量  $E_2(S)$  可进一步数学表征为

$$E_2(S) := \sup_{L, L'} \lim_n \left\{ \lambda_- R_s^{n,-} + \lambda_+ R_s^{n,+} \right\} = \lambda_- E_2(C_-^{A,\eta}) + \lambda_+ E_2(C_+^{A,\eta}) \quad (25)$$

其中, 系数  $\lambda_-$  为量子开关分解成量子信道  $C_-^{A,\eta}(\cdot)$  的概率, 系数  $\lambda_+$  为量子开关分解成量子信道  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  的概率。

## 3 性能分析

### 3.1 基于量子开关的两步纠缠分发容量的上界分析

由于基于量子开关的两步纠缠分发容量可分解为 2 个传统量子信道下两步纠缠分发容量的概率之和, 因此利用传统量子信道下两步纠缠分发容量的 PLOB 上界<sup>[9]</sup>, 可以获得  $E_2(S)$  的 REE 单字符上界为

$$E_2(S) \leq \lambda_- E_R(C_-^{A,\eta}) + \lambda_+ E_R(C_+^{A,\eta}) \quad (26)$$

由于量子信道  $C_-^{A,\eta}(\cdot)$  和  $C_+^{A,\eta}(\cdot)$  均满足条件

$$\mathcal{T}\left(\rho \otimes \rho_{C_{\pm}^{A,\eta}}\right) = C_{\pm}^{A,\eta}(\rho) \quad (27)$$

且  $\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}}$  是量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  的 Choi 矩阵, 具体表征为  $\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}} = (\mathbf{I} \otimes C_{\pm}^{A,\eta})\Phi^+$ , 因此量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  都是 Choi-SC。因此, 式(26)可进一步表示为

$$E_2(S) \leq \lambda_- E_R(\rho_{C_-^{A,\eta}}) + \lambda_+ E_R(\rho_{C_+^{A,\eta}}) \quad (28)$$

考虑到纠缠相对熵  $E_R(\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}})$  定义为在相对熵的度量下, 纠缠混合态  $\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}}$  与离它最近的可分态  $\rho_s$  之

间的距离, 可数学表征为<sup>[25-26]</sup>

$$E_R(\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}}) = \min_{\rho_s' \in \partial} S(\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}} | \rho_s') = S(\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}} | \rho_s) \quad (29)$$

其中,  $\partial$  为所有可能的可分态  $\rho_s'$  构成的集合。所以, 想获得纠缠相对熵的闭式表达, 就必须找到距离纠缠混合态  $\rho_{C_{\pm}^{A,\eta}}$  最近的可分态  $\rho_s$ 。

当量子开关分解成量子信道  $C_{-}^{A,\eta}(\cdot)$  时, 量子信道  $C_{-}^{A,\eta}(\cdot)$  的 Choi 矩阵为

$$\rho_{C_{-}^{A,\eta}} = (\mathbf{I} \otimes C_{-}^{A,\eta}) \Phi^+ = \Psi^- \quad (30)$$

其中,  $\Phi^+ = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$ ,  $\Psi^- = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$ , 且  $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ ,  $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ 。已知 EPR 纠缠态  $\Psi^-$  的一个最近可分态  $\rho_s$  可表示为<sup>[27]</sup>

$$\rho_s = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|) \quad (31)$$

所以, 基于式(30)和式(31), 可获得纠缠相对熵  $E_R(\rho_{C_{-}^{A,\eta}})$  为

$$\begin{aligned} E_R(\rho_{C_{-}^{A,\eta}}) &= S(\rho_{C_{-}^{A,\eta}} | \rho_s) = \\ &= \text{Tr} \left[ \rho_{C_{-}^{A,\eta}} \left( \text{lb} \rho_{C_{-}^{A,\eta}} - \text{lb} \rho_s \right) \right] = \\ &= -S(\rho_{C_{-}^{A,\eta}}) - \text{Tr} \left( \rho_{C_{-}^{A,\eta}} \text{lb} \rho_s \right) = \\ &= -S(\rho_{C_{-}^{A,\eta}}) - \sum_{k=0}^1 \langle \varsigma_k | \rho_{C_{-}^{A,\eta}} | \varsigma_k \rangle \text{lb} \lambda_k = 1 \end{aligned} \quad (32)$$

其中,  $S(\cdot)$  是冯诺依曼熵,  $\lambda_k$  为  $\rho_s$  的本征值,  $|\varsigma_k\rangle$  为本征值  $\lambda_k$  所对应的本征态。

当量子开关分解为量子信道  $C_{+}^{A,\eta}(\cdot)$  时, 量子信道  $C_{+}^{A,\eta}(\cdot)$  的 Choi 矩阵为

$$\rho_{C_{+}^{A,\eta}} = a_1 \Phi^+ + a_2 \Phi^- + a_3 \Psi^+ \quad (33)$$

其中, 纠缠态  $\Phi^- = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|$ ,  $\Psi^+ = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|$  且  $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$ ,  $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$ 。而混合纠缠态  $\rho_{C_{+}^{A,\eta}}$  所对应的一个最近可分态  $\rho_s$  可表示为

$$\rho_s = \frac{1}{2} \Phi^+ + \frac{a_2}{2(1-a_1)} \Phi^- + \frac{a_3}{2(1-a_1)} \Psi^+ \quad (34)$$

其中,  $a_1 > \frac{1}{2}$ , 具体求解过程见附录 1。

基于式(32)~式(34)中纠缠相对熵的一般求解方

法, 可以获得当系数  $a_1 > \frac{1}{2}$  时, 有纠缠相对熵  $E_R(\rho_{C_{+}^{A,\eta}})$  为

$$E_R(\rho_{C_{+}^{A,\eta}}) = S(\rho_{C_{+}^{A,\eta}} | \rho_s) = 1 - H_2(a_1) \quad (35)$$

其中,  $H_2(\cdot)$  是香农熵。由于任意一个系数  $a_i$  在错误概率  $p$ 、 $q$  的不同取值范围上都存在大于  $\frac{1}{2}$  的情况, 且纠缠混合态  $\rho_{C_{+}^{A,\eta}}$  在不同  $a_i > \frac{1}{2}$  时都存在一个与之距离最近的可分态  $\rho_s$ , 因此纠缠混合态  $\rho_{C_{+}^{A,\eta}}$  的

纠缠相对熵  $E_R(\rho_{C_{+}^{A,\eta}})$  可一般化为

$$E_R(\rho_{C_{+}^{A,\eta}}) = \begin{cases} 1 - H_2(L_{\max}), & L_{\max} > \frac{1}{2} \\ 0, & L_{\max} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (36)$$

其中,  $L_{\max} = \max\{a_i | i = 1, 2, 3\}$ 。

为方便描述, 用符号  $E_2^{\text{upper}}$  来表示量子开关下两步纠缠分发容量  $E_2(S)$  的单字符 REE 上界, 即令  $E_2(S) \leq E_2^{\text{upper}} = \lambda_- E_R(\rho_{C_{-}^{A,\eta}}) + \lambda_+ E_R(\rho_{C_{+}^{A,\eta}})$ , 那么结合式(32)和式(36), 可以获得基于量子开关的两步纠缠分发容量的上界为

$$E_2^{\text{upper}} = \begin{cases} 1 - H_2(L_{\max}) + pq, & L_{\max} > \frac{1}{2} \\ pq, & L_{\max} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (37)$$

### 3.2 基于量子开关的两步纠缠分发容量的下界分析

基于哈希不等式<sup>[28]</sup>及在某些信道下反向相干信息大于相干信息的论证<sup>[7]</sup>, 如有损信道, 本文可以获得基于量子开关的两步纠缠分发容量下界为

$$\begin{aligned} E_2(S) &\geq \lambda_- \max \{ I_{C(\text{RC})}(C_{-}^{A,\eta}), 0 \} + \\ &+ \lambda_+ \max \{ I_{C(\text{RC})}(C_{+}^{A,\eta}), 0 \} = \\ &= \max \{ \lambda_- I_{C(\text{RC})}(C_{-}^{A,\eta}), 0 \} + \max \{ \lambda_+ I_{C(\text{RC})}(C_{+}^{A,\eta}), 0 \} \end{aligned} \quad (38)$$

其中,  $I_C(C_{\pm}^{A,\eta})$  为量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  的相干信息,  $I_{\text{RC}}(C_{\pm}^{A,\eta})$  为量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  的反向相干信息。第一个不等式遵循两步纠缠分发容量的非负性, 即当(反向)相干信息为负时, 界定量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  的两步纠缠分发容量为零; 第二个等式则可以通过分配律直接获得。

当量子开关分解成量子信道  $C_{-}^{A,\eta}(\cdot)$  时, 量子信

道  $C_{-}^{A,\eta}(\cdot)$  的相干信息可表示为

$$I_C(C_{-}^{A,\eta}) := S\left[\text{Tr}_A\left(\rho_{C_{-}^{A,\eta}}\right)\right] - S\left(\rho_{C_{-}^{A,\eta}}\right) = 1 \quad (39)$$

当量子开关分解成量子信道  $C_{+}^{A,\eta}(\cdot)$  时, 量子信道  $C_{+}^{A,\eta}(\cdot)$  的相干信息可表示为

$$I_C(C_{+}^{A,\eta}) := S\left[\text{Tr}_A\left(\rho_{C_{+}^{A,\eta}}\right)\right] - S\left(\rho_{C_{+}^{A,\eta}}\right) - H(\mathbf{X}) = 1 \quad (40)$$

其中, 函数  $H(\mathbf{X})$  表示为  $H(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^3 a_i \text{lb}(a_i)$ ,  $\mathbf{X}=[a_1 a_2 a_3]$ 。值得注意的是, 由于当量子开关由量子比特翻转信道和量子相位翻转信道组成时量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  的相干信息与反向相干信息相同, 因此本文仅表征了量子信道  $C_{\pm}^{A,\eta}(\cdot)$  的相干信息。

结合式(39)和式(40), 基于量子开关的两步纠缠分发容量下界可进一步表示为

$$E_2(S) \geq \max \{1 - \lambda_+ H(\mathbf{X}), \lambda_-\} = \max \{1 + H_2(pq) - H(\mathbf{Q}), pq\} \quad (41)$$

其中, 函数  $H(\mathbf{Q})$  表示为  $H(\mathbf{Q}) = -\sum_{i=1}^4 b_i \text{lb}(b_i)$ ,  $\mathbf{Q} = \{b_i\}$  的具体取值见附录 2。

### 4 仿真分析

为了验证两通信节点间最终纠缠分发速率在量子开关作用下的有效提升, 假设量子比特翻转噪声信道的错误概率与量子相位翻转噪声信道的错误概率相同, 均为  $p$ , 且满足  $0 \leq p \leq 1$ , 将量子开关下获得的两步纠缠分发容量上下界与无量子开关作用下的两步纠缠分发容量上下界进行定量分析与比较, 且无量子开关作用下两步纠缠分发容量上下界的求解具体见附录 2 和附录 3。

图 5 为有无量子开关下信道错误率对纠缠相对熵的影响。从图 5 中可发现, 相比于无量子开关的信息传输模式, 纠缠相对熵在量子开关的作用下更不易受到信道噪声的干扰, 即在噪声信道下具有更强的鲁棒性; 此外, 图 5 中的虚线是文献[15]利用量子开关获得的量子容量上界, 未找到与纠缠混合态最近的可分态以至于无法获得确切的纠缠相对熵, 导致通信容量上界存在过松的问题。本文从这一角度出发给出了量子开关作用下量子通信容量的一个更紧上界, 为研究量子开关的传输性能提供了重要的理论与实际参考价值。

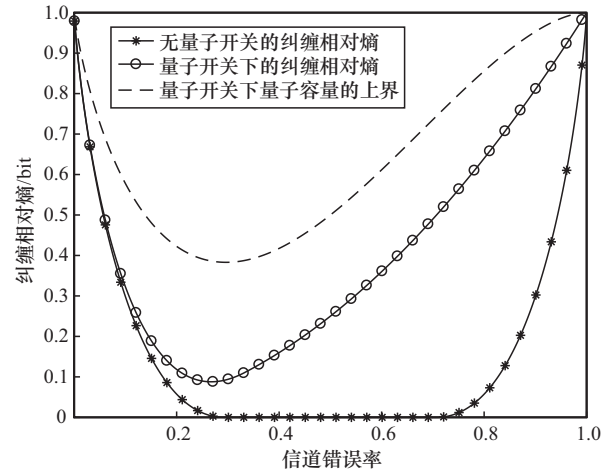


图 5 有无量子开关下信道错误率对纠缠相对熵的影响

图 6 为量子开关下两步纠缠分发容量的上下界。从图 6 中可以看出, 在信道错误率  $p$  满足条件  $p \in [0.33, 1]$  时, 量子开关作用下两步纠缠分发容量的上下界重合, 这是因为量子开关会按概率  $p^2$  分解成理想的无噪信道, 此时拥有最大的信道容量 1。因此, 在信道错误率  $p \in [0.33, 1]$  时可获得量子开关作用下两步纠缠分发容量的闭式表达, 即  $E_2(S) = p^2$ 。值得一提的是, 当信道错误率  $p = 0$  时, 量子开关作用下的两步纠缠容量为 1, 此时也表现为无噪信道。而在信道错误率  $p$  满足条件  $p \in (0, 0.33)$  时, 由于量子开关按概率  $1 - p^2$  分解成含噪量子信道, 此时量子开关作用下的两步纠缠分发容量仅能利用上下界来界定。

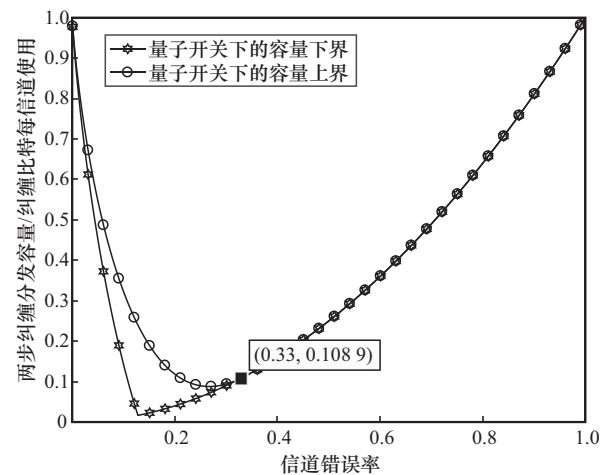


图 6 量子开关下两步纠缠分发容量的上下界

图 7 为量子开关下两步纠缠分发容量的容量上限突破。从图 7 中可以看出, 在信道错误率满足条件  $p \in (0.21, 1)$  时, 量子开关作用下两通信节点间

可共享的最小纠缠信息量明显优于无量子开关作用下两通信节点间可共享的最大纠缠信息量。这意味着在自适应纠缠分发协议中利用量子开关可以实现纠缠粒子的更高速率传输，为未来构建高效纠缠分发网络提供了新的可行思路。

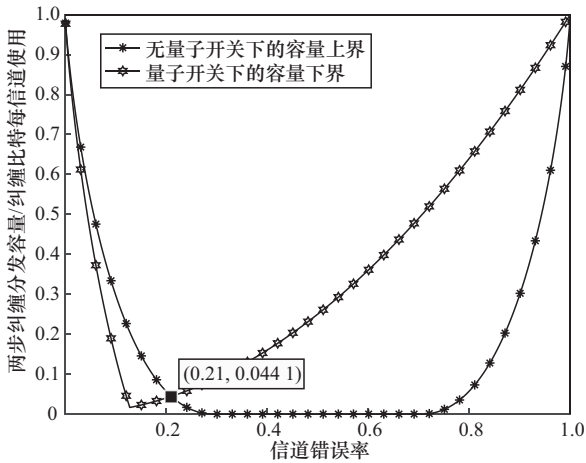


图7 量子开关下两步纠缠分发容量的容量上限突破

图8为无量子开关下两步纠缠分发容量的上下界。从图8中可以看出，在信道错误率满足条件  $p \in [0, 0.293) \cup (0.707, 1]$  时，通信节点通过基于量子开关的自适应纠缠分发协议可以实现纠缠粒子在传统量子信息传输模式下的有效传输；而在信道错误率满足  $p \in [0.293, 0.707]$  时，两步纠缠分发容量为零，这意味着通信节点在信道错误率为  $p \in [0.293, 0.707]$  时无法利用基于量子开关的自适应纠缠分发协议以非零的速率传输纠缠粒子实现与相邻节点间的纠缠共享。

图9为不同信息传输模式下两步纠缠分发容量的取值范围。从图9中可以看出，量子开关作用下

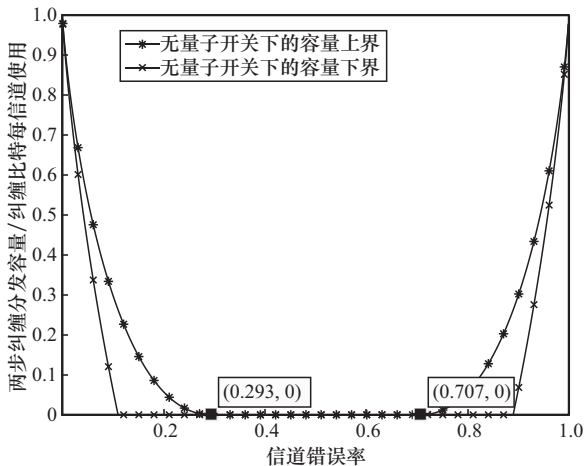


图8 无量子开关下两步纠缠分发容量的上下界

每完成一次纠缠粒子传输通信双方最终可共享的纠缠信息量明显优于无量子开关作用下的情况，特别地，在信道错误率  $p \in [0.33, 0.707]$  时，两步纠缠分发容量在量子开关作用下出现了容量从0到  $p^2$  的激活现象，即两步纠缠分发容量激活，这是反映量子开关因果激活现象的又一信息量，该发现为量子信息论的有效拓展奠定了重要的理论基础。

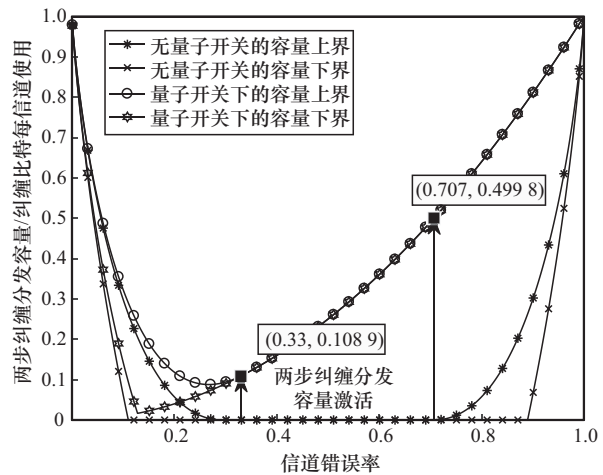


图9 不同信息传输模式下两步纠缠分发容量的取值范围

### 5 结束语

本文对基于量子开关的两步纠缠分发容量进行研究，通过设计基于量子开关的自适应纠缠分发协议，确定量子开关作用下的自适应纠缠分发速率。考虑到量子开关的全局输出与输入量子态之间并非一一对应关系，通过对量子控制系统进行量子相干测量，将量子开关分解成2个传统量子信道的概率之和；当量子开关表现为量子比特翻转信道与量子相位翻转信道不同因果序的量子叠加时，确定基于量子开关的两步纠缠分发容量为2个 Choi-CS 下两步纠缠分发容量的概率之和；基于传统量子信道下两步纠缠分发容量的 PLOB 上界，利用最近可分态找到纠缠相对熵的确切表达，确定基于量子开关的两步纠缠分发容量上下界。仿真分析表明，利用量子开关能够突破传统量子信道下两步纠缠分发容量的上界，实现两相邻通信节点间纠缠粒子的更高速率传输，这为未来远距离通信链路上减少量子中继器的部署、设计高效且低成本的纠缠分发网络提供了新的可行思路。

### 附录1 纠缠混合态 $\rho_{C+A}$ 的最近可分态的求解

已知一个满秩矩阵在它的偏置为秩亏时表现为最近

可分态, 那么对于一个满秩的贝尔对角混合态  $\sigma = \sum_{i=1}^4 R_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$  ( $|\beta_1\rangle\langle\beta_1| = \Phi^+$ ,  $|\beta_2\rangle\langle\beta_2| = \Phi^-$ ,  $|\beta_3\rangle\langle\beta_3| = \Psi^+$ ,  $|\beta_4\rangle\langle\beta_4| = \Psi^-$ ), 由于令  $\sigma$  偏置  $\sigma^{\Gamma_1}$  秩亏的充分条件是  $R_i = \frac{1}{2}$ , 因此当令系数  $R_1 = \frac{1}{2}$  时, 该贝尔对角混合态  $\sigma$  表现为一个在边界子空间上的最近可分态, 即

$$\sigma_{BD} = \frac{1}{2} |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + \sum_{i=2}^4 R_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \quad (42)$$

根据给定的最近可分态  $\sigma_{BD}$ , 距离  $\sigma_{BD}$  最近的纠缠态  $\rho_{BD}$  可利用式(43)获得<sup>[29-30]</sup>, 即

$$\rho_{BD} = \sigma_{BD} - xG(\sigma_{BD}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right) |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + \left(1 - \frac{x}{2}\right) \sum_{i=2}^4 R_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| = \sum_{i=1}^4 r_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \quad (43)$$

其中, 系数  $x > 0$ ; 第二个等式主要是通过计算函数  $G(\sigma_{BD})$  获得。

$$G(\sigma_{BD}) = \sum_{ij} G_{ij} |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \left( |\phi\rangle\langle\phi|^{\Gamma_1} \right) |\beta_j\rangle\langle\beta_j| \quad (44)$$

其中, 系数  $G_{ij}$  为

$$G_{ij} = \begin{cases} R_i & , R_i = R_j \\ \frac{R_i - R_j}{\ln R_i - \ln R_j} & , R_i \neq R_j \end{cases} \quad (45)$$

且量子态  $|\phi\rangle = |\beta_4\rangle$  是在  $\sigma_{BD}$  的偏置  $\sigma_{BD}^{\Gamma_1}$  取本征值为 0 时所对应的本征态; 第 3 个等式则是通过令  $r_1 = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$  且  $r_1 > \frac{1}{2}$ ,  $r_i = \left(1 - \frac{x}{2}\right) R_i$  获得。所以当满秩的贝尔对角纠缠混合态  $\rho_{BD}$  表现为  $\rho_{BD} = \sum_{i=1}^4 r_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$  且  $r_1 > \frac{1}{2}$  时, 式(42)可进一步转化为

$$\sigma_{BD} = \frac{1}{2} |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + \frac{1}{2(1-r_1)} \sum_{i=2}^4 r_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \quad (46)$$

值得注意的是, 由于  $\sigma^{\Gamma_1}$  满足秩亏的条件如  $\sigma^{\Gamma_1} = 3$  是令任意一个系数  $R_i$  为  $\frac{1}{2}$ , 可见上述  $r_1 > \frac{1}{2}$  是最近可分态中 EPR 态  $|\beta_1\rangle$  出现的概率为  $\frac{1}{2}$  时纠缠混合态  $\rho_{BD}$  所满足的条件, 因此当在  $\sigma = \sum_{i=1}^4 R_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i|$  中选择其他系数  $R_i$ ,  $i \neq 1$  使其满足条件  $R_i = \frac{1}{2}$  以获得最近可分态  $\sigma_{BD}$  时, 纠缠混合态  $\rho_{BD}$  则对应  $r_i > \frac{1}{2}$ 。

现令  $R_4 = \omega \rightarrow 0$ , 则有  $r_4 \rightarrow 0$ , 所以, 当纠缠混合态表现为 3 个 EPR 态  $\{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, |\beta_3\rangle\}$  的概率混合, 即

$$\rho'_{BD} = \sum_{i=1}^3 r_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \quad (47)$$

且  $\sum_{i=1}^3 r_i = 1$  时, 纠缠混合态  $\rho'_{BD}$  中任意一个系数  $r_i$  在满足大于  $\frac{1}{2}$  的条件下都存在一个与之最近的可分态  $\sigma'_{BD}$ 。当系数

$r_1 > \frac{1}{2}$  时, 结合式(46)可知, 与纠缠混合态  $\rho'_{BD}$  距离最近的可分态  $\sigma'_{BD}$  可表示为

$$\sigma'_{BD} = \frac{1}{2} |\beta_1\rangle\langle\beta_1| + \frac{1}{2(1-r_1)} \sum_{i=2}^3 r_i |\beta_i\rangle\langle\beta_i| \quad (48)$$

由于纠缠混合态  $\rho_{C_{x,n}}$  的表征方式与  $\rho'_{BD}$  相同, 因此纠缠混合态  $\rho_{C_{x,n}}$  的最近可分态  $\rho_s$  可直接令  $\sigma'_{BD}$  中的系数  $r_i = a_i, i = \{1, 2, 3\}$  获得。证毕。

## 附录 2 无量子开关下两步纠缠分发容量的上界

在没有量子开关的作用下, 假设信息载体在量子信道中的传输方式表现为按因果序依次遍历量子相位翻转信道  $\eta(\cdot)$  和量子比特翻转信道  $\Lambda(\cdot)$ , 那么量子信道  $\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\cdot)$  可以将单个量子态  $\rho$  转化为

$$\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\rho) = \sum_{ij} \mathbf{E}_i \mathbf{F}_j \rho \mathbf{F}_j^\dagger \mathbf{E}_i^\dagger = b_1 \rho + b_2 \sigma_z \rho \sigma_z + b_3 \sigma_x \rho \sigma_x + b_4 \sigma_y \rho \sigma_y \quad (49)$$

其中, 不同作用方式  $\mathbf{I}$ 、 $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  出现的概率分别为  $b_1 = (1-p)(1-q)$ 、 $b_2 = (1-p)q$ 、 $b_3 = p(1-q)$ 、 $b_4 = pq$ 。

显然, 量子信道  $\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\cdot)$  也是 Choi-SC, 该信道下的两步纠缠分发容量上界可简单表示为

$$E_2(\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}) \leq E_R(\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}}) \quad (50)$$

其中, 量子信道  $\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\cdot)$  的 Choi 矩阵  $\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}}$  为

$$\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}} = b_1 \Phi^+ + b_2 \Phi^- + b_3 \Psi^+ + b_4 \Psi^- \quad (51)$$

从附录 1 可知, 当纠缠混合态  $\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}}$  中系数  $b_i > \frac{1}{2}$  时可获得相应的最近可分态  $\rho_s$ 。由于系数  $b_i$  是关于错误概率  $p$ 、 $q$  的函数, 会随着  $p$ 、 $q$  的变化而变化, 因此  $p$ 、 $q$  的不同取值范围会使得不同的  $b_i$  满足大于  $\frac{1}{2}$  的条件。由此, 本文可以获得纠缠混合态  $\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}}$  的纠缠相对熵为

$$E_R(\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}}) = S(\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}} | \rho_s) = \begin{cases} 1 - H_2(P_{\max}), & P_{\max} > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (52)$$

其中,  $P_{\max} = \max\{b_i | i = 1, 2, 3, 4\}$ 。证毕。

## 附录 3 无量子开关下两步纠缠分发容量的下界

由于量子信道  $\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\cdot)$  的 Choi 矩阵  $\rho_{\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}}$  是 EPR 纠缠态的概率混合, 因此量子信道  $\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\cdot)$  的相干信息  $I_C(\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda})$  与反向相干信息  $I_{RC}(\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda})$  相同, 计算结果为

$$I_{C(RC)}(\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}) = 1 - H(\vec{Q}) \quad (53)$$

其中,  $H(\vec{Q}) = -\sum_{i=1}^4 b_i \text{lbb}_i$ 。基于哈希不等式, 可以获得量子信道  $\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}(\cdot)$  的两步纠缠分发容量下界为

$$E_2(\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}) \geq I_C(\mathcal{N}_{\eta \rightarrow \Lambda}) = 1 + \sum_{i=1}^4 b_i \text{lbb}_i \quad (54)$$

证毕。

## 参考文献:

- [1] 王华, 赵永利. 量子密钥分发城域光组网技术前瞻[J]. 通信学报, 2019, 40(9): 168-174.  
WANG H, ZHAO Y L. Overview of quantum key distribution metropolitan optical networking technology[J]. Journal on Communications, 2019, 40(9): 168-174.
- [2] 文静, 李森, 刘馨, 等. 南宁经典网络设施部署量子密钥分发网络[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2022, 47(3): 723-731.  
WEN J, LI S, LIU X, et al. Deploying quantum key distribution network over a classical network infrastructure in Nanning[J]. Journal of Guangxi University (Natural Science Edition), 2022, 47(3): 723-731.
- [3] BENNETT C H, BRASSARD G, CRÉPEAU C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Physical Review Letters, 1993, 70(13): 1895-1899.
- [4] BRIEGEL H J, DÜR W, CIRAC J I, et al. Quantum repeaters: the role of imperfect local operations in quantum communication[J]. Physical Review Letters, 1998, 81(26): 5932-5935.
- [5] BENNETT C H, DIVINCENZO D P, SMOLIN J A, et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction[J]. Physical Review A, Atomic, Molecular, and Optical Physics, 1996, 54(5): 3824-3851.
- [6] BENNETT C H, DIVINCENZO D P, SMOLIN J A. Capacities of quantum erasure channels[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(16): 3217-3220.
- [7] GARCÍA-PATRÓN R, PIRANDOLA S, LLOYD S, et al. Reverse coherent information[J]. Physical Review Letters, 2009, 102(21): 210501.
- [8] TAKEOKA M, GUHA S, WILDE M M. Fundamental rate-loss tradeoff for optical quantum key distribution[J]. Nature Communications, 2014, 5: 5235.
- [9] PIRANDOLA S, LAURENZA R, OTTAVIANI C, et al. Fundamental limits of repeaterless quantum communications[J]. Nature Communications, 2017, 8: 15043.
- [10] 阎兆鹏, 聂敏, 杨光. 光纤信道中量子信令的传输损伤及修复策略[J]. 通信学报, 2015, 36(7): 185-190.  
YAN Z P, NIE M, YANG G. Transmission damage and repair strategy of quantum signaling in fiber channel[J]. Journal on Communications, 2015, 36(7): 185-190.
- [11] CHIRIBELLA G, D'ARIANO G M, PERINOTTI P, et al. Quantum computations without definite causal structure[J]. Physical Review A, 2013, 88(2): 022318.
- [12] EBLER D, SALEK S, CHIRIBELLA G. Enhanced communication with the assistance of indefinite causal order[J]. Physical Review Letters, 2018, 120(12): 120502.
- [13] CHIRIBELLA G, BANIK M, BHATTACHARYA S S, et al. Indefinite causal order enables perfect quantum communication with zero capacity channels[J]. New Journal of Physics, 2021, 23(3): 033039.
- [14] CHANDRA D, CALEFFI M, CACCIAPUOTI A S. The entanglement-assisted communication capacity over quantum trajectories[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2022, 21(6): 3632-3647.
- [15] CALEFFI M, SIMONOV K, CACCIAPUOTI A S. Beyond Shannon limits: quantum communications through quantum paths[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2023, 41(8): 2707-2724.
- [16] CAO H, BAVARESCO J, WANG N N, et al. Semi-device-independent certification of indefinite causal order in a photonic quantum switch[J]. Optica, 2023, 10(5): 561.
- [17] GOSWAMI K, CAO Y, PAZ-SILVA G A, et al. Increasing communication capacity via superposition of order[J]. Physical Review Research, 2020, 2(3): 033292.
- [18] GUO Y, HU X M, HOU Z B, et al. Experimental transmission of quantum information using a superposition of causal orders[J]. Physical Review Letters, 2020, 124(3): 030502.
- [19] PROCOPIO L M, MOQANAKI A, ARAÚJO M, et al. Experimental superposition of orders of quantum gates[J]. Nature Communications, 2015, 6: 7913.
- [20] RUBINO G, ROZEMA L A, FEIX A, et al. Experimental verification of an indefinite causal order[J]. Science Advances, 2017, 3(3): e1602589.
- [21] CALEFFI M, CACCIAPUOTI A S. Quantum switch for the quantum Internet: noiseless communications through noisy channels[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2020, 38(3): 575-588.
- [22] XU R Q, ZHOU R G, LI Y C. Toward the advantages of quantum trajectories on entanglement distribution in quantum networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2023, 22(8): 5170-5184.
- [23] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [24] CHANDRA D, CACCIAPUOTI A S, CALEFFI M, et al. Direct quantum communications in the presence of realistic noisy entanglement[J]. IEEE Transactions on Communications, 2022, 70(1): 469-484.
- [25] VEDRAL V. The role of relative entropy in quantum information theory[J]. Reviews of Modern Physics, 2002, 74(1): 197-234.
- [26] VEDRAL V, PLENIO M B, RIPPIN M A, et al. Quantifying entanglement[J]. Physical Review Letters, 1997, 78(12): 2275-2279.
- [27] VEDRAL V, PLENIO M B. Entanglement measures and purification procedures[J]. Physical Review A, 1998, 57(3): 1619-1633.
- [28] HORODECKI M, HORODECKI P, HORODECKI R. Unified approach to quantum capacities: towards quantum noisy coding theorem[J]. Physical Review Letters, 2000, 85(2): 433-436.
- [29] ISHIZAKA S. Analytical formula connecting entangled states and the closest disentangled state[J]. Physical Review A, 2003, 67(6): 060301.
- [30] MIRANOWICZ A, ISHIZAKA S. Closed formula for the relative entropy of entanglement[J]. Physical Review A, 2008, 78(3): 032310.

## [作者简介]



许瑞青 (1995-), 女, 江苏南通人, 上海海事大学博士生, 主要研究方向为量子信息理论、量子通信网络、量子通信协议设计。



周日贵 (1973-), 男, 江西高安人, 博士, 上海海事大学教授、博士生导师, 主要研究方向为智能信息处理、量子计算。



李尧翀 (1996-), 男, 江西南昌人, 博士, 上海海事大学讲师, 主要研究方向为量子机器学习、量子优化。