

# 最大稀疏稳健恒定束宽波束形成器设计

吴凯, 苏涛, 李强, 何学辉

(西安电子科技大学 雷达信号处理国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 为了降低宽带阵列恒定束宽的实现复杂性, 在分析宽带阵列稀疏性的基础上, 构造了以阵元和抽头延迟线(TDL, tapped delay line)稀疏性的凸组合为目标函数, 满足恒定束宽约束的波束形成器优化模型, 降低了所需的阵元和 TDL 个数。引入重加权机制, 通过序列凸优化, 使稀疏性递增并收敛到最大值, 证明了保证波束形成器稳健性的范数约束与最大 TDL 稀疏目标函数之间的等价性。仿真结果表明, 可用较少的阵元及 TDL 个数获得相同的恒定束宽性能, 具有工程实用价值。

**关键词:** 宽带波束形成器; 恒定束宽; 最大稀疏; 稳健; 序列凸优化

**中图分类号:** TN958.92

**文献标识码:** A

## Design of robust constant beamwidth beamformer with maximal sparsity

WU Kai, SU Tao, LI Qiang, HE Xue-hui

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** To reduce the complexity of broadband array systems, an optimization model was built based on the analysis of the sparsity of the broadband array. The objective function was the convex combination of sensor and TDL sparsity with the constraint of constant beamwidth. By re-weighting the objective function, the sparsity of the array weights increased and converged to the maximal value. The equivalence between the norm constraint on array weights and the sparsity of TDL was proved. Simulation results demonstrate that to obtain the same performance, the number of sensors and TDL of the proposed beamformer needed is decreased which reduces the system complexity, showing that the beamformer designed has great practical value.

**Key words:** broadband beamformer; constant beamwidth; maximal sparsity; robust; sequential convex optimization

### 1 引言

宽带波束形成作为阵列信号处理的重要发展方向, 广泛应用于通信<sup>[1]</sup>、雷达<sup>[2]</sup>和声呐<sup>[3]</sup>等技术领域。随着带宽的增加, 常规波束形成器存在频率色散问题<sup>[4]</sup>, 即波束主瓣宽度会随着频率的降低而增加。为保证宽带信号的输出频谱不发生畸变, 需要设计恒定束宽波束形成器 (CBB, constant beamwidth beamformer)<sup>[5,6]</sup>, 主要包含频域和时域 2 种设计方法<sup>[6]</sup>。频域设计 CBB 不利于输出连续相位信号

波形, 且设计精度低于后者。时域 CBB 的设计更加灵活, 借助凸优化, 还可以获得全局最优解。鄢社锋等利用二阶锥规划, 建立了空时联合 CBB 设计基本框架, 给出多种 CBB 设计准则<sup>[5,7,8]</sup>, 包括旁瓣可控和主瓣差异最小化等<sup>[7,8]</sup>。主瓣宽度、旁瓣电平、干扰零陷是 CBB 设计需要考虑的主要问题, 为了更灵活地建立 CBB 的优化设计模型, 文献[9]引入了空间响应偏差(SRV, spatial response variation)约束, 并以 SRV 衡量优化得到的 CBB 性能。Yan 等<sup>[5,7,8]</sup>设计的 CBB 和 Duan 等<sup>[9-12]</sup>设计的

收稿日期: 2014-08-30; 修回日期: 2015-03-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61271291, 61201285); 新世纪优秀人才支持计划基金资助项目(NCET-09-0630)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (61271291, 61201285); The Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-09-0630)

CBB 具有设计灵活可控、精度高和稳健性强的优点, 但为了提高阵列的一维距离像分辨能力, 必须采用大带宽<sup>[13]</sup>, 因而需要更高的滤波器阶数<sup>[14]</sup>, 即抽头延迟线(TDL, tapped delay line)个数。同时, 为了提高阵列的波束空间分辨能力, 需要进一步增加阵元个数<sup>[13]</sup>, 这将导致约束矩阵的条件数更大, 趋于病态, 使优化求解的数值稳定性变差, 并最终导致优化问题无解或无法得到全局最优解。为了降低由阵元个数增加带来的系统复杂度的提升, 文献[15~18]将压缩感知理论应用于阵列波束形成。文献[15~17]利用阵列接收信号的空域稀疏性, 建立了窄带阵列压缩感知模型。文献[18]对比了宽、窄带条件下阵列稀疏性的差别, 以各阵元抽头权值的  $l_2$  范数等效窄带阵列的空域加权值, 建立了宽带阵列的稀疏模型, 指出宽带阵列存在阵元位置和 TDL 双重稀疏性。

本文基于文献[18]中宽带阵列的稀疏表示, 构建了最大宽带阵列稀疏和恒定束宽约束的 CBB 序列凸优化(SCO, sequential convex optimization)设计模型。由于宽带阵列的稀疏度难以确定, 通过调和因子, 以阵元和 TDL 稀疏性的凸组合为目标函数。为了获得最大稀疏性, 采用迭代重加权 SCO 技术<sup>[19]</sup>, 以每次迭代得到的最优阵列权值构造下一次 CBB 迭代优化的重加权值, 所构造的迭代优化序列是非增序列, 保证了迭代优化的收敛性; 每次迭代都是凸优化问题, 易于获取全局最优解。另外, 利用向量范数等价定理证明了保证波束形成器稳健性的范数约束等价于最大 TDL 稀疏目标函数, 表明构建的 CBB 优化模型固有一定的稳健性。最后仿真分析了: 调和因子的取值与阵元稀疏和 TDL 稀疏之间的关系; 调和因子对稳健性的影响; 最大阵列稀疏度与阵元个数和 TDL 个数之间的关系。验证了所构建 CBB 优化模型的有效性。

## 2 CBB 凸优化设计模型

本文构建的 CBB 设计模型对阵列形式没有要求, 考虑某一任意结构基阵, 由  $M$  个各向同性的阵元组成。采用图 1 给出的 Frost 时域宽带波束形成器结构, 即每个阵元的接收信号首先预延迟, 然后由一个  $L$  阶 FIR 滤波器进行幅度和相位加权, 通过设计 FIR 滤波器系数实现特定角度和空域的恒定束宽波束形成。

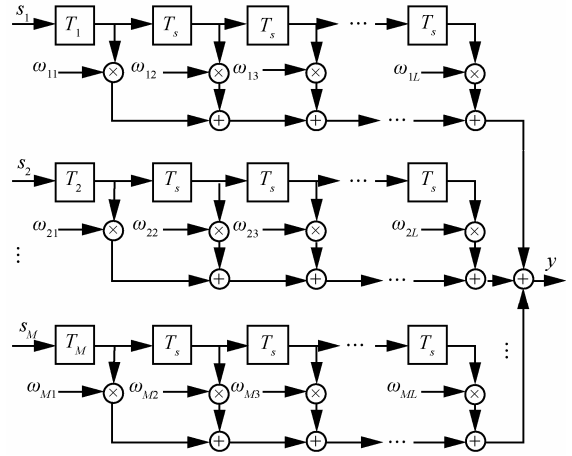


图 1 时域宽带波束形成器结构

远场条件下, 宽带阵列的波束响应  $P(f, \theta, \varphi)$  是频率和阵列空间指向的函数, 包括方位角  $\theta$  和俯仰角  $\varphi$

$$P(f, \theta, \varphi) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \omega_{ml} e^{j2\pi f \left[ (l-1)T_s + T_m + \frac{\tau_m}{c} \right]} \quad (1)$$

其中,  $T_s$  是系统采样时间;  $T_m (1 \leq m \leq M)$  是各个阵元预延迟量;  $\omega_{ml} (1 \leq l \leq L)$  是第  $m$  号阵元的第  $l$  个抽头系数。  $\tau_m = \mathbf{p}_m \cdot \mathbf{v}_m$  是  $m$  号阵元接收回波相对于参考阵元的时间延时;  $\cdot$  表示内积运算;  $\mathbf{p}_m = (x_m, y_m, z_m)$  为直角坐标系中,  $m$  号阵元的空间位置矢量; 回波信号的单位传播矢量为  $\mathbf{v} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ 。

定义宽带波束形成的导向矢量

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(f, \theta, \varphi) &= \mathbf{s}(f, \theta, \varphi) \otimes \mathbf{h}(f) \\ \mathbf{s}(f, \theta, \varphi) &= [\dots e^{-j2\pi f \left( T_m + \frac{\mathbf{p}_m^H \mathbf{v}}{c} \right)} \dots]^T \\ \mathbf{h}(f) &= [1 \ e^{-j2\pi f T_s} \ \dots \ e^{-j2\pi f (L-1)T_s}]^T \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{s}(f, \theta, \varphi)$  是角度  $(\theta, \varphi)$  处频点  $f$  对应的窄带阵列的  $M \times 1$  维导向矢量;  $\otimes$  表示 2 个向量的 Kronecker 积;  $\mathbf{h}(f)$  是频点  $f$  的  $L \times 1$  维离散傅里叶变换矢量。将各个阵元上的 FIR 抽头系数顺序排列得到宽带阵列的加权向量, 对每一个  $i, j$  从 1 变化到  $L$

$$\mathbf{w} = [\dots \ \omega_{ij} \ \dots]^T, 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq L \quad (3)$$

式(1)可矢量化为  $P(f, \theta, \varphi) = \mathbf{S}(f, \theta, \varphi)^H \mathbf{w}$ 。假设  $P_d(f, \theta, \varphi)$  为期望波束响应, 则 CBB 的凸优化设计模型由优化问题(式(4))给出, 其中  $\{\Theta_{ML}, \Phi_{ML}\}$  和  $\{\Theta_{SL}, \Phi_{SL}\}$  分别是主瓣和旁瓣空域范围, 频率集  $F$  是待优化频率范围。

$$\min_{\omega} SRV(f, \theta, \varphi) = \|P(f, \theta, \varphi) - P_d(f_d, \theta, \varphi)\|_2, \left. \begin{array}{l} f \in F, \theta \in \Theta_{ML}, \varphi \in \Phi_{ML} \\ \left\{ \begin{array}{l} \|P(f', \theta', \varphi')\|_{\infty} \leq \delta_{SL}, \quad (4.1) \\ f' \in F, \theta' \in \Theta_{SL}, \varphi' \in \Phi_{SL} \end{array} \right. \\ S(f_d, \theta_d, \varphi_d)^H \mathbf{w} = 1 \quad (4.2) \\ \mathbf{C}^T \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (4.3) \end{array} \right\} \quad (4)$$

式(4.1)~式(4.3)给出的 CBB 优化模型, 目标函数受限于 3 个约束条件。其中, 式(4.1)和式(4.2)的含义比较明显, 式(4.3)是一个抽象约束集, 可以表示任何线性约束, 例如, 形成特定角度上的零陷, 或为了增强阵列的稳健性, 引入期望指向角度上的一阶或二阶导数约束等。

### 3 最大稀疏 CBB 设计的 SCO 模型

第 2 节在 Frost 宽带波束形成器的基础上, 给出了 CBB 凸优化设计模型。本节首先分析宽带阵列的稀疏性, 然后在此基础上给出本文构建的最大稀疏 CBB 序列凸优化设计模型。

#### 3.1 宽带阵列的稀疏性

式(1)的矢量化表示  $P(f, \theta, \varphi) = \mathbf{S}(f, \theta, \varphi)^H \mathbf{w}$  结合式(2)可得

$$P(f, \theta, \varphi) = [s(f, \theta, \varphi) \otimes \mathbf{h}(f)]^H \mathbf{w} \quad (5)$$

假设待优化参数集为  $(F, \Theta, \Phi)$ , 频率、方位角和俯仰角的离散点数分别为  $N$ 、 $J$  和  $K$ 。定义参数集  $(F, \Theta, \Phi)$  上的波束响应为

$$\mathbf{P} = [\dots P(f_n, \theta_j, \varphi_k) \dots]^T, \quad 1 \leq n \leq N, 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K \quad (6)$$

$\mathbf{P}$  是一个  $(F, \Theta, \Phi)$  的列向量。由式(5)得到参数集  $(F, \Theta, \Phi)$  上的空时联合变换矩阵,

$$\mathbf{T} = [\dots s(f_n, \theta_j, \varphi_k) \otimes \mathbf{h}(f_n) \dots] \quad (7)$$

式(5)结合式(6)和式(7)得参数集  $(F, \Theta, \Phi)$  上的宽带阵列波束响应的矩阵形式

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^H \mathbf{w} \quad (8)$$

对于式(4.1)~式(4.3)表示的 CBB 设计模型, 若旁瓣电平约束  $\delta_{SL} = 0$ , 则期望波束响应  $\mathbf{P}_d$  仅在  $(F, \Theta_{ML}, \Phi_{ML})$  和式(4.3)中的离散参数点上有非零值, 其他元素均为 0。CBB 的设计可以理解为优化加权向量  $\mathbf{w}$  使参数集上  $(F, \Theta, \Phi)$  上的波束响应  $\mathbf{P}$  尽可能逼近理想波束响应  $\mathbf{P}_d$ , 即寻找  $\mathbf{w}$ , 满足

$\mathbf{P}_d = \mathbf{P} = \mathbf{T}^H \mathbf{w}$ 。由于  $\mathbf{P}_d$  仅有少量元素非 0, 可以说加权向量  $\mathbf{w}$  在由变换矩阵  $(\mathbf{T}^H)^{\#}$  表征的变换域上具有稀疏性<sup>[1~19]</sup>, 其中  $(\cdot)^{\#}$  表示求矩阵的广义逆运算。

#### 3.2 最大稀疏 CBB 的 SCO 优化模型

文献[15~17]从压缩感知的角度, 利用窄带阵列的空域稀疏性, 进行随机采样, 并通过求解式(9)表示的优化问题, 以较少的阵元位置数据恢复满阵接收信号。

$$\min \|\mathbf{s}\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}\|_2 \leq \varepsilon \quad (9)$$

实际中,  $l_0$  范数的最小化是非凸的 NP 问题, 因此用  $l_1$  范数代替  $l_0$  范数<sup>[19]</sup>。结合优化问题(式(4)和式(9)问题, 将窄带阵列形式下稀疏优化模型直接应用到宽带 CBB 设计中, 得到式(10)优化问题。

$$\min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \|P(f, \theta, \varphi) - P_d(f_d, \theta, \varphi)\|_2 \leq \varepsilon, \quad (10.1) \\ f \in F, \theta \in \Theta_{ML}, \varphi \in \Phi_{ML} \\ \left\{ \begin{array}{l} \|P(f, \theta, \varphi)\|_{\infty} \leq \delta_{SL}, \quad (10.2) \\ f \in F, \theta \in \Theta_{SL}, \varphi \in \Phi_{SL} \end{array} \right. \\ \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (10.3) \end{array} \right. \quad (10)$$

式(10.3)将式(4.2)和式(4.3)合并成同一个线性约束。结合式(5)~式(8)得

$$\min_{\mathbf{w}} \|\mathbf{w}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{\mathbf{P}}_d - \mathbf{T}^H \mathbf{w}\|_2 \leq \tilde{\varepsilon} \quad (11)$$

式(11)问题将式(10)问题的 3 个约束合并, 向量  $\tilde{\mathbf{P}}_d$  是参数集  $(F, \Theta, \Phi)$  上的期望波束响应, 在主瓣区域, 由  $P_d(f_d, \theta, \varphi)$  构成, 旁瓣电平为 0。  $\tilde{\varepsilon}$  是理想波与实际波束响应的之间的差异, 在主瓣区域为  $\varepsilon$ , 在旁瓣区域为  $\delta_{SL}$ 。

式(9)与式(11)的形式完全相同, 但两者的物理意义截然不同。式(9)表示利用窄带阵列比阵元个数少的多的随机观测去恢复或逼近满阵时的回波数据, 而式(11)是利用宽带阵列加权向量的稀疏性, 设计具有最大稀疏的恒定束宽波束形成器。

式(11)给出的优化问题仅考虑了阵列加权的整体稀疏性, 如果能利用阵元级稀疏性<sup>[15~17]</sup>, 将会很大程度上降低 CBB 的系统复杂性。式(12)给出了文献[18]中的宽带阵列波束形成器阵元稀疏度的定义

$$\langle \mathbf{w} \rangle = \sum_{m=1}^M \left\| [\omega_{m1} \dots \omega_{mL}]^T \right\|_2 \quad (12)$$

实际中阵元稀疏难以直接确定, 给定某一稀疏

上限，可能导致优化问题无解或无法求取全局最优解。因而引入调和因子  $\beta$  构造如下的目标函数，改变调和因子的大小，即可控制优化结果中阵元稀疏性和 TDL 稀疏性所占的比重。

$$L = \beta \langle \mathbf{w} \rangle + (1 - \beta) \|\mathbf{w}\|_1 \quad (13)$$

为了获得最大稀疏性，本文引入重加权机制<sup>[18,19]</sup>，得到如下的重加权目标函数

$$\tilde{L} = \beta \left( \sum_{m=1}^M a_m t_m \right) + (1 - \beta) \left( \frac{\sum_{n=1}^{ML} \omega_n}{|\omega_n| + \zeta} \right)$$

$$a_m = \frac{1}{(t_m + \zeta)}, t_m = \left\| [\omega_{m1} \ \cdots \ \omega_{mL}]^T \right\|_2 \quad (14)$$

式(14)中， $a_m$  是每次迭代中阵元稀疏性的重加权值， $\zeta$  的引入是为了防止分母为 0，从而保证了数值稳定性， $\frac{1}{(|\omega_n| + \zeta)}$  是 TDL 稀疏性的重加权值。

由阵元稀疏性重加权值和 TDL 重加权值的构造看出，当阵列加权较小时，目标函数中 TDL 稀疏性的重加权值越大；当整个阵元后对应的 FIR 滤波器的抽头系数向量的  $l_2$  范数较小时，目标函数中的阵元稀疏性的重加权值越大。

结合式(14)给出的重加权目标函数，以及式(5)和式(10)中给定的恒定束宽约束，给出本文提出的最大稀疏 CBB 的序列凸优化迭代算法，如算法 1 所示。式(16)问题中的第一个约束采用了式(11)中给出的恒定束宽约束的矩阵形式，包括主瓣 SRV 约束，旁瓣电平约束以及式(10.3)表示的其他线性约束。第 4 步的终止条件可以是连续两次优化结果中，阵元稀疏性和 TDL 稀疏性不再发生变化等条件。由式(16)的目标函数的构造可以看出： $\tilde{L}^{i+1}(\mathbf{w}^{i+1}) \leq \tilde{L}^i(\mathbf{w}^i)$ ，即每次迭代得到的目标函数值将呈现非增序列，所以该 SCO 迭代算法必然收敛到最大稀疏度。

**算法 1** 最大稀疏 CBB 的 SCO 迭代算法

1) 初始化:  $i=1$ ，给定调和因子  $\beta$ ，优化式(15)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} L &= \beta \langle \mathbf{w} \rangle + (1 - \beta) \|\mathbf{w}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \|P(f, \theta, \varphi) - P_d(f_d, \theta, \varphi)\|_2 \leq \varepsilon, \\ f \in F, \theta \in \Theta_{ML}, \varphi \in \Phi_{ML} \\ \|P(f, \theta, \varphi)\|_\infty \leq \delta_{SL}, \\ f \in F, \theta \in \Theta_{SL}, \varphi \in \Phi_{SL} \\ \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{f}} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

2)  $i=i+1$ ，计算重加权

$$a_m^i = \frac{1}{(t_m^{i-1} + \zeta)}, t_m^{i-1} = \left\| [\omega_m^{i-1} \ \cdots \ \omega_{mL}^{i-1}]^T \right\|_2 \quad (16)$$

3) 求解优化式(17)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}^i} \quad &\left\{ \tilde{L}^i = \beta \left( \sum_{m=1}^M a_m^i t_m^i \right) + (1 - \beta) \left( \frac{\sum_{n=1}^{ML} \omega_n^i}{(|\omega_n^i| + \zeta)} \right) \right\} \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} \|\tilde{\mathbf{P}}_d - \mathbf{T}^H \mathbf{w}^i\|_2 \leq \tilde{\varepsilon} \\ \left\| [\omega_{m1}^i \ \cdots \ \omega_{mL}^i]^T \right\|_2 \leq t_m^i, m=1 \sim M \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

4) 终止条件判断，满足则停止迭代，否则重复步骤 2)和步骤 3)。

**3.3 稳健性说明**

导向矢量误差会导致设计的 CBB 性能下降<sup>[18]</sup>，且已证明有限快拍导致的数据协方差矩阵估计误差可以等效为导向矢量误差。假设实际导向矢量为  $\tilde{\mathbf{S}}(f, \theta, \varphi)$ ，满足

$$\tilde{\mathbf{S}}(f, \theta, \varphi) = \mathbf{S}(f, \theta, \varphi) + \mathbf{e} \quad (18)$$

$\mathbf{S}(f, \theta, \varphi)$  作为理想宽带阵列导向矢量，由式(2)给出， $\mathbf{e}$  是服从高斯分布的随机扰动。则由实际导向矢量误差引起的波束响应偏差可以表示为

$$E = \left\| [\tilde{\mathbf{S}}(f, \theta, \varphi)]^H \mathbf{w} - [\mathbf{S}(f, \theta, \varphi)]^H \omega \right\|_2 \quad (19)$$

式(18)可以进一步写成

$$\begin{aligned} E &= \left\| [\tilde{\mathbf{S}}(f, \theta, \varphi) - \mathbf{S}(f, \theta, \varphi)]^H \mathbf{w} \right\|_2 \\ &= \left\| \mathbf{e}^H \mathbf{w} \right\|_2 \leq \|\mathbf{e}\|_2 \|\mathbf{w}\|_2 = \sigma^2 \|\mathbf{w}\|_2 \end{aligned} \quad (20)$$

由式(20)可以看出，在导向矢量方差扰动  $\sigma^2$  一定的情况下，阵列的加权范数  $\|\mathbf{w}\|_2$  越小，则波束响应误差越小，宽带阵列的稳健性越好。

范数等价定理<sup>[20]</sup>表明存在正常数  $a$  和  $b$ ，使有限线性空间  $\mathbf{V}^{ML}$  中的  $l_1$  范数和  $l_2$  范数满足

$$a \|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq b \|\mathbf{x}\|_1 \quad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{V}^{ML}) \quad (21)$$

容易证明  $a = \frac{1}{ML}$ ， $b = \text{sqrt}(ML)$ ， $\text{sqrt}(\bullet)$  表示

求平方根运算。若式(19)中约束波束响应误差  $E \leq \gamma$ ，即给定误差上限，需要满足

$$\sigma^2 \|\mathbf{w}\|_2 \leq \gamma \quad (22)$$

由式(21)得  $\sigma^2 \|\mathbf{w}\|_2 \leq \sigma^2 \text{sqrt}(ML) \|\mathbf{w}\|_1$ ，若有  $\sigma^2 \text{sqrt}(ML) \|\mathbf{w}\|_1 \leq \gamma$ ，式(22)一定成立，至此，便将保证稳健性的  $l_2$  范数约束转变成了  $l_1$  范数约

束。式(10)、式(11)、式(13)、式(15)、式(17)给出的各种形式的 CBB 优化问题中, 为了实现 TDL 稀疏性, 最小化目标函数均包含阵列权向量  $l$  范数, 因此说波束形成器的稳健性约束与最大 TDL 稀疏具有等价性。表明本文构建的 CBB 对导向矢量误差固有一定的稳健性。式(17)亦表明, 调和因子  $\beta$  将影响波束形成器的稳健性, 这一点在仿真分析中得到论证。

通过以上分析可以看出, 与文献[18]相比, 本文构建的最大稀疏稳健 CBB 优化模型具有以下优势: 通过引入调和因子, 在目标函数中将阵元稀疏度和 TDL 稀疏度隔离, 因而便于衡量调和因子的变化对于阵元稀疏度和 TDL 稀疏度各自的影响, 这在本文仿真分析中会详细体现; 本文对阵元和 TDL 稀疏度采用不同的重加权构造方式, 进一步增强了两者的隔离度, 易于满足不同稀疏度的设计要求; 本文对旁瓣区域采用的是无穷范数约束, 相比文献[18], 可以获取更低的旁瓣电平。另外, 本文还给出了稀疏 CBB 稳健性的理论证明。

### 4 仿真分析

不失一般性, 本节基于均匀线阵对本文提出的最大稀疏 CBB 设计进行仿真分析, 且暂不考虑俯仰角的影响。

#### 4.1 最大稀疏 CBB 的 SCO 设计

阵元个数  $M=30$ , 阵元间距为最大工作频率对应的半波长, 每个阵元后的 FIR 滤波器的抽头个数  $L=20$ 。归一化频率集为  $F=[0.16,0.32]$ 。只考虑方位角, 阵列指向为  $0^\circ$ , 选定主瓣角度域  $\Theta_{ML}=[-4^\circ,4^\circ]$ , 旁瓣角度域  $\Theta_{SL}=[-60^\circ,-6^\circ]\cup[6^\circ,60^\circ]$ , 主瓣离散角度间隔取  $0.5^\circ$ , 旁瓣为  $1^\circ$ , 并假设在  $-20^\circ$  和  $30^\circ$  的位置处有 2 个干扰需要形成两处零陷。采用表 1 的 SCO 算法, 主瓣 SRV 上限定为  $\varepsilon=0.001$ , 旁瓣电平上限  $\delta_{SL}=-30\text{ dB}$ 。调和因子  $\beta$  分别取 0 和 1 这 2 个极端, 分别对应最大 TDL 稀疏和最大阵元稀疏。

图 2 给出了 YAN<sup>[5]</sup>、本文  $\beta=0$  和  $\beta=1$  情况下的波束方向图, 可以看出 3 种情况均实现了恒定束宽, 主瓣宽带在频率集  $F=[0.16,0.32]$  内保持恒定。本文波束形成器整体旁瓣电平位于  $-30\text{ dB}$  以下。图 3 给出了 3 种优化结果得到的三维波束方向图在  $(f,\theta)$  平面上的投影。进一步验证了设计结果满足恒定束宽约束。且在  $-20^\circ$  和  $30^\circ$  位置上, 频率集  $F$

上均形成 2 条较深的零陷。图 4 给出了 3 种情况下, 优化得到的宽带阵列权值在(阵元,抽头)位置平面上的分布。为了更清晰地看出最大稀疏 CBB 设计结果中有效权值的分布, 将所有非零权值都置为 1, 图 4(b)和图 4(c)中, 黑色表示权值为 0, 白色表示权值为 1。 $\beta=0$  时, 显示出较强的 TDL 稀疏性;  $\beta=1$  时, 则显示出很强的阵元稀疏性, 6 个阵元后的 FIR 抽头稀疏都为 0。

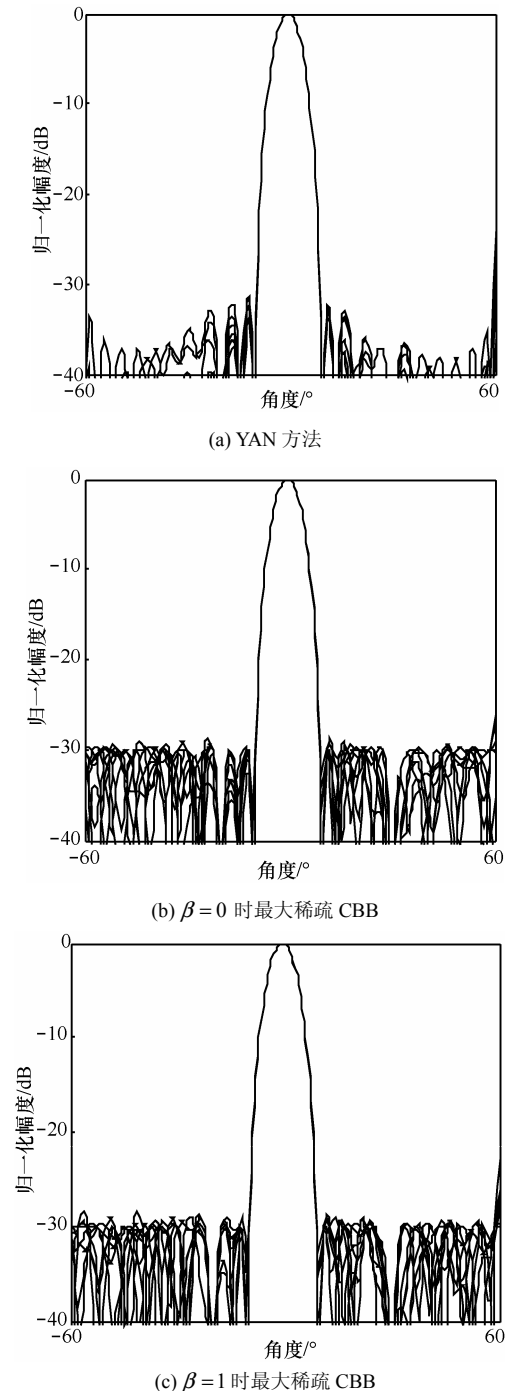


图 2 不同频率上形成的波束方向

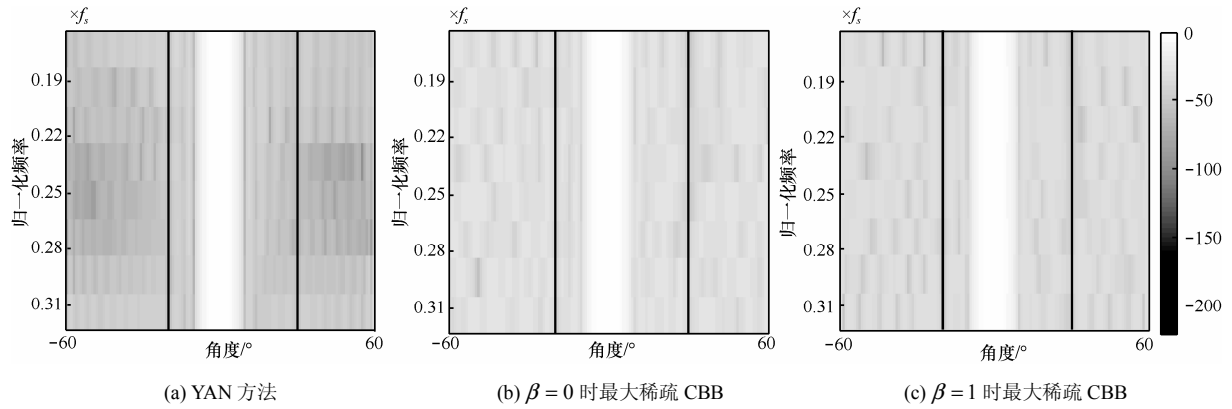


图 3 恒定束宽波束形成器形成波束方向图在  $(f, \theta)$  参数集平面上的投影

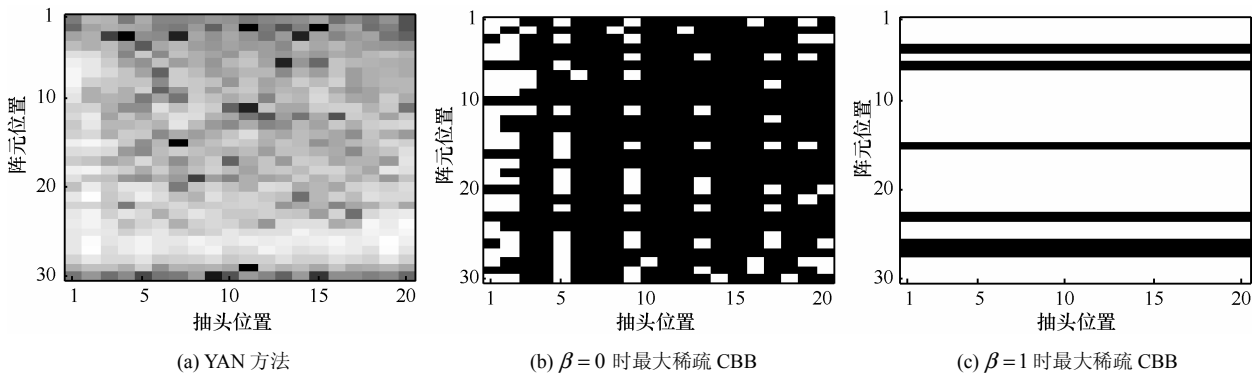


图 4 恒定束宽波束形成器优化权在(阵元,抽头)二维位置平面上的分布

### 4.2 宽带阵列稀疏性与阵元和 TDL 个数之间的关系

本节主要研究宽带阵列加权的整体稀疏性(视为  $\beta = 0.5$  的情况)与阵元和 TDL 个数之间的关系。在其他仿真参数与 4.1 节相同的情况下, 将阵元个数从 12 以 5 为步长增加至 52, 每个阵元后 FIR 滤波器的 TDL 个数由 10 以 5 为步长增加至 20。得到图 5 所示的稀疏度随阵元和 TDL 个数的变化曲线。

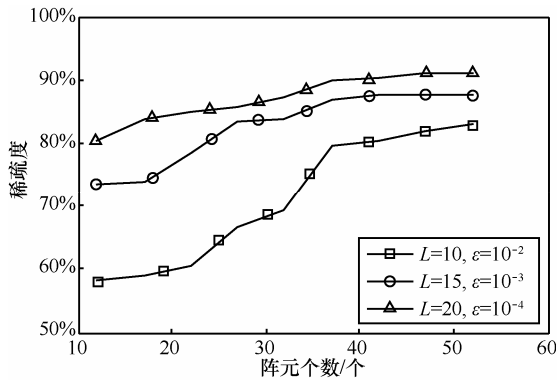


图 5 宽带阵列稀疏度随阵元和 TDL 个数变化曲线

3 种 TDL 个数情况下, 稀疏度随阵元个数的变化呈现的是互不相交且基本单调递增的 3 条曲线。

TDL 个数越大, 曲线的整体稀疏度越大, 这表明相同阵元个数情况下, 阵列的整体稀疏度随阵元个数的增加而增加。同时, 3 种 TDL 个数取值对应的合成波束主瓣 SRV 约束上限并不相同, 随着 TDL 个数的增加数量级递减。

表 1 进一步定量分析了稀疏性随阵元和 TDL 个数的变化。表中各项的具体含义, 以“103(1 040)”为例, 表示当前阵元和 TDL 个数下, 共有 1 040 个阵列权值, CBB 的最大稀疏设计结果中, 阵列加权值中只有 103 个非零值, 稀疏优化后, 剩余的有效权个数仅不到原来权总数的十分之一。

### 4.3 调和因子对宽带阵列稀疏性的影响

与 4.1 节中其他仿真参数相同, 每个阵元后的 FIR 滤波器抽头个数固定为 10, 阵元个数取 20、30 和 40, 分别进行调和因子变化的仿真实验。调和因子  $\beta$  从 0 开始以 0.2 为步长递增至 1。

图 6 给出了各个阵元个数情况下, SCO 优化结果中阵元和 TDL 稀疏性随调和因子的变化曲线。可以看出实际优化结果中, 阵元稀疏随调和因子的增加呈现单调非减, TDL 稀疏性随调和因子的增加呈现单调非增。

表 1 最大 CBB 稀疏优化结果的定量分析

阵元数	$L=10$	$L=15$	$L=20$
12	50(120)	48(180)	47(240)
17	70(170)	67(255)	55(340)
22	87(220)	71(330)	67(440)
17	90(270)	67(405)	76(540)
32	98(320)	77(480)	81(640)
37	75(370)	73(555)	75(740)
42	83(420)	79(630)	82(840)
47	85(470)	88(705)	85(940)
52	88(520)	96(780)	103(1 040)

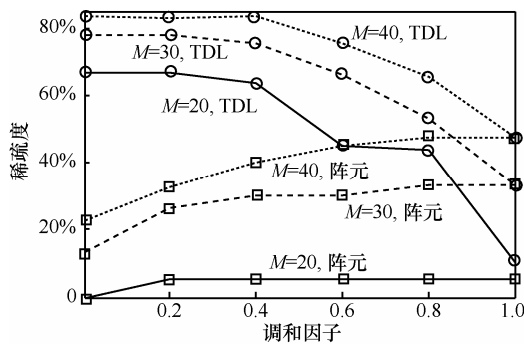


图 6 调和因子对阵元稀疏性和 TDL 稀疏性的影响

附录给出了阵元数为 40，TDL 个数为 10 的情况下，每一种调和因子取值下，得到的宽带阵列权值在(阵元,抽头)位置平面上的分布。

#### 4.4 CBB 稳健性的仿真分析

本节将进行 CBB 稳健性的仿真分析。采用 4.3 节中的仿真条件进行蒙特卡洛仿真实验。对于各种阵元个数，均在理想宽带阵列导向矢量的基础上加上高斯扰动以模拟含有误差的实际导向矢量。高斯

扰动的方差由-30 dB 增加至-5 dB，每种扰动方差下进行 1 000 次独立实验。主要以式(4)问题中给出的主瓣 SRV 考核 CBB 的稳健性。图 7 给出了阵元个数为 20、30 和 40 的情况 1 000 次蒙特卡洛实验的平均结果。可以看出：不同阵元个数的情况下，本文设计的 CBB 的稳健性受调和因子的影响均呈现出相同的规律，即调和因子越小，优化结果中阵列权向量的  $l_1$  范数越小，CBB 的稳健性越好。

## 5 结束语

为了降低由大带宽和阵元个数引起的宽带阵列系统复杂度，构建了一种最大稀疏恒定束宽波束形成器的序列凸优化设计模型，最大程度上利用宽带阵列的阵元稀疏性和抽头延迟线稀疏性。仿真结果验证了所构建优化模型的有效性，得到以下结论：1) 在满足恒定束宽约束的条件下，很大程度上减少了所需的阵元及抽头延迟线个数；2) 阵元和抽头延迟线个数越多，阵列的稀疏性越强；3) 通过改变调和因子的大小，可以实现不同程度的阵元稀疏和抽头延迟线稀疏；4) 设计的恒定束宽波束形成器对导向矢量误差具有一定稳健性，且随着抽头延迟线的稀疏性增大而增强。

本文的理论分析和仿真结果均表明设计的最大稀疏恒定束宽波束形成器能较大程度上降低宽带阵列波束形成的复杂性，但没有具体研究硬件实现过程，这将作为下一步的研究重点。

## 附录 调和因子作用的仿真结果

图 8 给出了(阵元,TDL)位置平面上，阵列权值的分布情况，图中的权值已采用了 4.1 节中相同的处理，黑色表示 0 值，

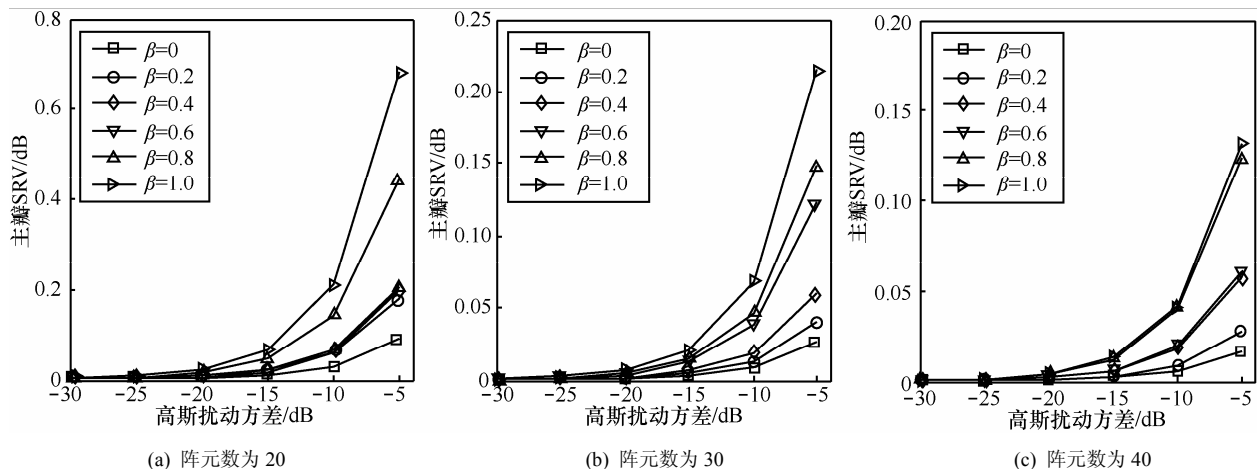


图 7 设计的恒定束宽波束形成器的稳健性随调和因子和阵元数的变化

白色表示有效权值，图 8(a)~图 8(f)分别对应  $\beta$  从 0 变化到 1。图 8(a)~图 8(f)的每一行的三幅图从左至右分别为初始、中间和收敛状态，即式(15)问题的优化结果，迭代优化过程的中间优

化结果以及最终收敛时的优化结果。横向对比显示了重加权机制在优化过程中发挥的作用，(阵元,TDL)位置平面上的零值逐渐变多，即让阵列的稀疏性逐渐增大。纵向对比表明，采用本

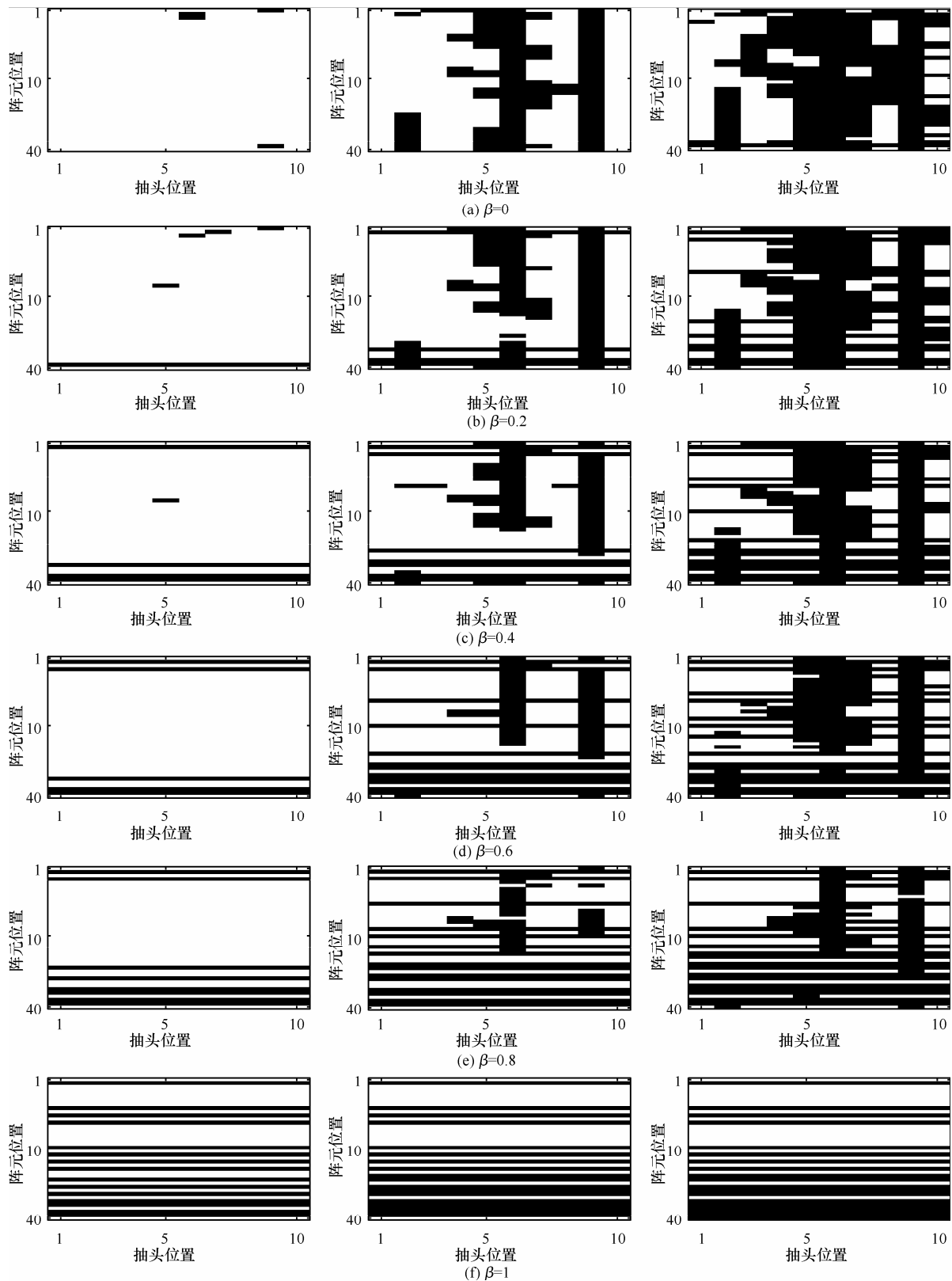


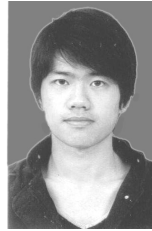
图 8 不同调和因子下宽带阵列的稀疏性在 CBB 迭代凸优化过程中的变化

文构建的优化模型中的目标函数形式,  $\beta$  越大, 优化结果中的阵元稀疏性越强。

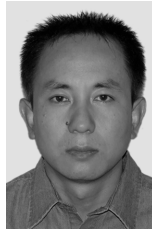
### 参考文献:

- [1] 夏灿峰, 何世文, 黄永明, 等. 考虑收发机损耗的多小区多用户下行链路波束形成算法[J]. 通信学报, 2013, 34(12): 104-112.  
XIA C F, HE S W, HUANG Y M, *et al.* Multi-cell multi-user downlink beam forming design considering transceiver impairment[J]. Journal on Communications, 2013, 34(12): 104-112.
- [2] MELWIN W, SCHEER J. Principles of Modern Radar: Advanced Techniques[M]. Raleigh: SciTech Publishing, 2013.
- [3] YAN S, SUN H, MA X L, *et al.* Time-domain implementation of broadband beamformer in spherical harmonics domain[J]. IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2011, 19(5): 1221-1230.
- [4] 王德纯. 宽带相控阵雷达[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.  
WANG D C. Wideband Phased Array Radar[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010.
- [5] YAN S F. Optimal design of FIR beamformer with frequency invariant patterns[J]. Applied Acoustics, 2006, 67: 511-528.
- [6] 周天, 张秉志, 杜伟东, 等. 基于 Farrow 结构的恒定束宽时域波束形成器研究与实现[J]. 通信学报, 2014, 35(6): 92-99.  
ZHOU T, ZHANG B Z, DU W D, *et al.* Research and implementation of constant beamwidth time-domain beamformer based on Farrow structure[J]. Journal on Communications, 2014, 35(6): 92-99.
- [7] 鄢社锋, 马远良. 基于二阶锥规划的任意传感器阵列时域恒定束宽波束形成[J]. 声学学报, 2005, 30(4): 309-316.  
YAN S F, MA Y L. Broadband constant beamwidth beamforming for arbitrary sensor arrays in time domain via second order cone programming[J]. Acta Acustica, 2005, 30(4): 309-316.
- [8] YAN S F, MA Y L, HOU C H. Optimal array pattern synthesis for broadband arrays[J]. Journal of Acoustical Society of America, 2007, 122(5): 2686-2696.
- [9] DUAN H G, NG B P, SEE C M S, *et al.* Application of the SRV constraint in broadband pattern synthesis[J]. Signal Processing, 2008, 88(4): 1035-1045.
- [10] 范展, 梁国龙. 基于凸优化的最小旁瓣恒定束宽时域宽带波束形成[J]. 电子学报, 2013, 41(5): 943-948.  
FAN Z, LIANG G L. Broadband beamforming with minimum sidelobe and constant beamwidth based on convex optimization[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(5): 943-948.
- [11] ZHAO Y, LIU W, LANGLEY R J. Adaptive wideband beamforming with frequency invariance constraints[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(4): 1175-1184.
- [12] 陈明建, 罗景青. 基于空间响应偏差约束的最小二乘宽带波束形成[J]. 电路与系统学报, 2013, 18(1): 84-89.  
CHEN M J, LUO J Q. Least squares broadband beamforming based on spatial response variation response[J]. Journal of Circuits and Systems, 2013, 18(1): 84-89.
- [13] 曹运合, 张焕颖, 张守宏, 等. 宽带相控阵数字波束形成与干扰置零方法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(2): 365-369.  
CAO Y H, ZHANG H Y, ZHANG S H, *et al.* Digital beamforming and jammer nulling method for wideband phased array radar[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(2): 365-369.
- [14] VOOK F W, COMPTON J R T. Bandwidth performance of linear adaptive arrays with tapped delay line processing[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(3): 901-908.
- [15] 王建, 盛卫星, 韩玉兵, 等. 基于压缩感知的自适应波束形成算法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(2): 439-444.  
WANG J, SHENG W X, HAN Y B, *et al.* Adaptive beamforming algorithm based on compressive sensing[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(2): 439-444.
- [16] HAWES M B, LIU W. Robust sparse antenna array design via compressive sensing[A]. International Conference on Digital Signal Processing[C]. Fira, Greece, 2013. 865-868.
- [17] OLIVER G, CARLIN M, MASSA A. Complex-weight sparse linear array synthesis by Bayesian compressive sampling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2012, 60(5): 2309-2326.
- [18] HAWES M B, LIU W. Sparse array design for wideband beamforming with reduced complexity in tapped delay-lines[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2014, 22(8): 1236-1247.
- [19] CANDES E J, WAKIN M B, BOYD S P. Enhancing sparsity by re-weighted  $l_1$  minimization[J]. Journal of Fourier analysis and applications, 2008, 14(5): 877-905.
- [20] 程云鹏, 徐仲. 矩阵论(第3版)[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2013.  
CHENG Y P, XU Z. Matrix Theory(3rd Edition)[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnic University Press, 2013.

### 作者简介:



吴凯(1990-), 男, 安徽淮北人, 西安电子科技大学博士生, 主要研究方向为宽带阵列信号处理算法、自适应波束形成算法等。



苏涛(1968-), 男, 陕西西安人, 西安电子科技大学教授、博士生导师, 主要研究方向为面向雷达、声纳、通信的高速实时信号处理、信号处理快速算法研究、宽带阵列信号处理、MIMO波形设计、ISAR成像等。



李强(1992-), 男, 山东青岛人, 西安电子科技大学硕士生, 主要研究方向为宽带相控阵雷达系统。



何学辉(1979-), 男, 江西吉安人, 西安电子科技大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为雷达信号处理凸优化理论、目标检测、雷达干扰抑制等。