doi:10.11959/j.issn.1000-436x.2015243

基于支撑集保护的回环匹配算法

田淑娟[1,2]，樊晓平[1,3]，裴廷睿[2]，杨术[2]，李哲涛[2]
（1.中南大学 信息科学与工程学院，湖南 长沙 410075; 2. 湘潭大学 信息工程学院，湖南 湘潭 411105;
3. 湖南财政经济学院 网络化系统研究所，湖南 长沙 410205）

摘 要：针对部分压缩感知贪婪迭代类重构算法中误删正确支撑集元素的缺点，提出了一种基于支撑集保护的回环匹配算法（LM-P）。该算法依据最小残差内积初始化非受保护支撑集元素，然后依据观测向量在非受保护支撑集对应观测子矩阵上的投影，选择对应投影绝对值最大的元素添加到受保护支撑集，迭代获得受保护支撑集，从而重构原始信号。实验结果表明，对于非零值服从正态分布且稀疏度小于观测值一半数目的稀疏信号，LM-P 算法的重构准确率超过 86%；对于低信噪比稀疏信号，该算法的重构准确率能够维持在 99%以上；与 OMP、CoSaMP、SP 和 GPA 算法相比，LM-P 精确重构所需观测值数更少；此外，LM-P 算法在二维图像信号的重构中也有较好性能。

关键词：压缩感知；贪婪迭代；支撑集；稀疏信号；LM-P
中图分类号：TN911 **文献标识码**：A

Loopback matching algorithm with support set protection

TIAN Shu-juan[1,2], FAN Xiao-ping[1,3], PEI Ting-rui[2] , YANG Shu[2], LI Zhe-tao[2]
(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410075, China;
2. College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China;
3. Laboratory of Networked Systems, Hunan University of Finance and Economics, Changsha 410205, China)

Abstract: There was a drawback of deleting right support elements in some greedy iterative reconstruction algorithms. To resolve this problem, loopback matching algorithm with support set protection (LM-P) was proposed. First, LM-P initialized elements of non-protected support set based on minimum residual inner product. Second, it computed the projections of observations on the observation sub-matrix corresponding to non-protected support set elements. Then, an element in non-protected support set with the largest projection was added to the protected support set. An alternative multiplicative iteration method was employed to obtain the whole protected support set. As to reconstruct a sparse signal whose nonzero elements are normally distributed and the signal sparsity is less than half the number of measurements, experimental results show that the reconstruction accuracy of LM-P algorithm exceeds 86%. For sparse signals with small noise, the reconstruction accuracy of LM-P can maintain over 99 %. Compared with OMP, CoSaMP, SP and GPA algorithms, LM-P's observations are smaller. LM-P also has good performance for image reconstruction.

greedy iteration; support set; sparse signal; LM-P

1 引言

现实中绝大部分的非稀疏自然信号如声音、图像等，都具有内在的稀疏特性。对于具有内在稀疏性的这些自然信号，传统的信号处理模式以 Nyquist-Shannon 理论体系为基础，提出了以不低于信号带宽 2 倍的采样速率采样信号才能精确重构出原始信号。由 Donoho 等于 2006 年提出的压缩感知[1~4]

收稿日期：2015-03-30；**修回日期**：2015-07-25
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61379115, 61110215, 61311140261, 61372049)；湖南省自然科学基金资助项目(2015JJ4047, 12JJ9021,13JJ8006)；湖南省科技计划基金资助项目(2014GK3038)；湖南省重点学科建设基金资助项目
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(61379115, 61100215, 61311140261, 61372049); The Natural Science Foundation of Hunan Province (2015JJ4047, 12JJ9021, 13JJ8006); Hunan Provincial Science and Technology Project (2014GK3038);The Construct Program of the Key Discipline in Hunan Province

（CS, compressive sensing）理论打破了传统的先采样后压缩的理论框架，在信号采样的同时选择合适的观测矩阵实现对其压缩，采样速率不再受信号带宽限制，而与信号的稀疏度密切相关。采样速率的降低能有效减少采样样本和节省数据存储空间，因此，压缩感知方法在无线传感器网络[5]、雷达成像[6]和图像处理[7]、医学[8]等领域得到了广泛应用。

贪婪重构算法是一类低复杂度、收敛速度快和易于实现的压缩感知重构算法。它主要利用残差、观测值与观测矩阵中列向量的关系来迭代近似确定稀疏信号中非零值位置即支撑集[9]。其中，正交匹配追踪(OMP, orthogonal matching pursuit)是早期提出的一种经典贪婪重构算法[10]。它利用当前残差与观测矩阵中列向量的相关性，逐个确定支撑集。由于 OMP 是一次性确定稀疏信号中非零值位置，导致 OMP 可重构稀疏信号的稀疏度范围受限。为了提升 OMP 算法性能，很多学者对其进行了改进研究[11,12]。压缩抽样匹配追踪(CoSaMP, compressive sampling matching pursuit) [13]和子空间追踪(SP, subspace pursuit) [14]引入扩增缩减方法来更新支撑集，可重构稀疏信号的稀疏度范围比 OMP 更广，但不能保证更新支撑集时对应的残差 $\boldsymbol{r}_S$ 的收敛性。逐步贪婪追踪算法(GPA, greedy pursuit algorithm)是一种逐个最优增减支撑集的贪婪重构算法[15]，保证了残差的收敛性。但 CoSaMP、SP 和 GPA 通过先扩增后缩减支撑集，改进可重构信号稀疏范围的同时增加了矩阵维度，使重要中间参数计算复杂度增加且精确度降低。以上贪婪重构算法的性能比较如表 1 所示。

其中，K 为信号稀疏度，M 为观测值数目，N 为原始信号长度。

由自然信号变换后的稀疏信号，信号内在的相关性决定了其非零值位置分布和非零值大小具有一定特征。因此，本文旨在利用这种信号的外在特征表现，试图预知正确的支撑集元素并加以保护，达到避免误删正确的支撑集元素进而提高重构准确率的目的。

2 基于支撑集保护的回环匹配算法

2.1 符号定义和定理推导

设全集 $\boldsymbol{\Omega}=\{1,2,\cdots,N\}$；矩阵全集 $\boldsymbol{\Lambda}$，表示矩阵所有行号或列号组成的集合；子集 $S\subset\boldsymbol{\Omega}$，$|S|$ 表示子集 S 中的元素个数；补集 $\bar{S}$，且 $\bar{S}\cap S=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=\boldsymbol{\Omega}$；$\frac{S}{\{i\}}$ 表示在集合 S 中删除元素 i，其补集为 $[i,\bar{S}]$；$[S,i]$ 表示在集合 S 中添加元素 i，其补集为 $\frac{\bar{S}}{\{i\}}$；定位函数 $L_S(i)$，表示 i 在集合 S 中的位置；*end* 指向向量（矩阵）最后一个元素（行或列）；观测向量 $\boldsymbol{y}$；观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$；度量向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$；内积矩阵 $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}$；子内积逆 $\boldsymbol{P}_S=(\boldsymbol{\Phi}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_S)^{-1}=\boldsymbol{\Psi}(S,S)^{-1}$；正交补矩阵 $\boldsymbol{Q}_S=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\Phi}_S(\boldsymbol{\Phi}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_S)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_S^{\mathrm{T}}$；正交补投影矩阵 $\boldsymbol{D}_S=\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{\Phi}_{\bar{S}}$；残差 $\boldsymbol{r}_S=\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{y}$；残差内积 $\varDelta_S=\boldsymbol{r}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_S=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{y}$；公因子 $f_S(i)=\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_S\boldsymbol{\phi}_i=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}(\varLambda,L_{\bar{S}}(i))\boldsymbol{D}(\varLambda,L_{\bar{S}}(i))$，$i\in\bar{S}$；系数向量 $\boldsymbol{c}_S(i)=\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{\Psi}(S,i)$。

定理 1 当 $i\in\bar{S}$，且 $\boldsymbol{P}_S$，$\boldsymbol{P}_{[S,i]}$ 存在时，有

$$\boldsymbol{Q}_{[S,i]}=\boldsymbol{Q}_S-\frac{(\boldsymbol{Q}_S\phi_i)(\boldsymbol{Q}_S\phi_i)^{\mathrm{T}}}{f_S(i)} \tag{1}$$

$$\varDelta_S-\varDelta_{[S,i]}=\frac{(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_S\phi_i)^2}{f_S(i)} \tag{2}$$

证明 由 $\boldsymbol{P}_S=(\boldsymbol{\Phi}_S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_S)^{-1}=\boldsymbol{\Psi}(S,S)^{-1}$ 得到

$$\boldsymbol{P}_{[S,i]}=\boldsymbol{\Psi}([S,i],[S,i])^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}(S,S) & \boldsymbol{\Psi}(S,i)\\ \boldsymbol{\Psi}(i,S) & \boldsymbol{\Psi}(i,i)\end{bmatrix}^{-1} \tag{3}$$

表 1 部分贪婪重构类算法性能对比

重构算法	算法优势	算法缺陷	算法复杂度
OMP	算法简易	稀疏度范围受限	$O(KMN)$
CoSaMP	自适应修正支撑集	稀疏度存在 $\frac{M}{3}$ 门限效应	$O(MN)$
SP	自适应修正支撑集	稀疏度存在 $\frac{M}{2}$ 门限效应	$O(KMN)$
GPA	收敛性优于 OMP、CoSaMP	稀疏度存在 $\frac{M}{2}$ 门限效应，计算复杂度高	$O(M^2N)$

进一步依据分块矩阵求逆理论可得

$$\boldsymbol{P}_{[S,i]}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_S & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{f_S(i)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_S(i)\\ -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_S^{\mathrm{T}}(i) & -1\end{bmatrix} \tag{4}$$

依据 $\boldsymbol{Q}_S$ 定义得

$$\boldsymbol{Q}_{[S,i]}=\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{\Phi}_S,\phi_i]\boldsymbol{P}_{[S,i]}[\boldsymbol{\Phi}_S,\phi_i]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

将式(5)代入式(6)可证式(1)。依据 $\varDelta_S$ 定义得

$$\varDelta_S-\varDelta_{[S,i]}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_S-\boldsymbol{Q}_{[S,i]})\boldsymbol{y} \tag{6}$$

联立式(1)和式(5)可证式(2)。证毕。

此定理为支撑集元素的增添提供了理论依据，即在当前支撑集集合 S 中添加元素 i 时，只要 $\boldsymbol{P}_S$，$\boldsymbol{P}_{[S,i]}$ 存在，则通过正交补矩阵和观测值的相应运算，可添加残差内积变化量最大的元素，进一步减小计算复杂度，提高算法重构速度。

定理 2　当 $i\in S$，且 $\boldsymbol{P}_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}$，$\boldsymbol{P}_{\frac{S}{\{i\}}}$ 存在，有

$$\boldsymbol{Q}_{\frac{S}{\{i\}}}=\boldsymbol{Q}_S+\frac{(P_S(L_S(i),\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Phi}_S^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}P_S(L_S(i),\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Phi}_S^{\mathrm{T}}}{P_S(L_S(i),L_S(i))} \tag{7}$$

$$\varDelta_{\frac{S}{\{i\}}}-\varDelta_S=\frac{(\boldsymbol{P}_S(L_S(i),\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{m}(S))^2}{P_S(L_S(i),L_S(i))} \tag{8}$$

证明　依据式(4)

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{\frac{S}{\{i\}}} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}-\frac{1}{f_{\frac{S}{\{i\}}}(i)}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}(i)\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}^{\mathrm{T}}(i) & -\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}(i)\\ -\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}^{\mathrm{T}}(i) & 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$P_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}(L_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}(i),\boldsymbol{\Lambda})=\frac{1}{f_{\frac{S}{\{i\}}}(i)}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}^{\mathrm{T}}(i) & 1\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$P_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}(\varLambda,L_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}(i))=\frac{1}{f_{\frac{S}{\{i\}}}(i)}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}(i)\\ 1\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{P}_{\frac{S}{\{i\}}}=\boldsymbol{P}_S\left(L_S\left(\frac{S}{\{i\}}\right),L_S\left(\frac{S}{\{i\}}\right)\right)-\frac{\boldsymbol{P}_S\left(L_S\left(\frac{S}{\{i\}}\right),L_S(i)\right)\boldsymbol{P}_S\left(L_S(i),L_S\left(\frac{S}{\{i\}}\right)\right)}{\boldsymbol{P}_S(L_S(i),L_S(i))} \tag{12}$$

依据式(1)得

$$\boldsymbol{Q}_{\frac{S}{\{i\}}}=\boldsymbol{Q}_S+\frac{(\boldsymbol{Q}_{\frac{S}{\{i\}}}\phi_i)(\boldsymbol{Q}_{\frac{S}{\{i\}}}\phi_i)^{\mathrm{T}}}{f_{\frac{S}{\{i\}}}(i)} \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_{\frac{S}{\{i\}}}\phi_i=\phi_i-\boldsymbol{\Phi}_{\frac{S}{\{i\}}}\boldsymbol{P}_{\frac{S}{\{i\}}}\boldsymbol{\Phi}_{\frac{S}{\{i\}}}^{\mathrm{T}}\phi_i=\boldsymbol{\Phi}_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{c}_{\frac{S}{\{i\}}}(i)\\ 1\end{bmatrix} \tag{14}$$

联立式(10)～式(13)可证式(7)。依据式(7)和定义 $\varDelta_S$ 易证式(8)。证毕。

此定理则为支撑集元素的缩减提供了理论依据，即在当前支撑集合 S 中删除元素 i 时，只要 $\boldsymbol{P}_{\left[\frac{S}{\{i\}},i\right]}$，$\boldsymbol{P}_{\left[\frac{S}{\{i\}}\right]}$ 存在，通过相应子内积逆运算可删除残差内积变化量最小的冗余元素，进一步提高算法重构速度。

2.2　算法步骤

基于支撑集保护的回环匹配算法（LM-P）沿用传统贪婪迭代算法方式，先逐步最小化残差内积来获取初始支撑集，在初始支撑集无法满足残差内积要求下，进行元素回环匹配选择。其中，在缩减过程中，以残差内积增量大小判断，在受保护支撑集中剔除残差内积变化量最小的元素，同时将残差内积变化量最大的元素保护起来。缩减后的支撑集再依残差内积增量大小，依次从非受保护支撑集中选择观测向量投影最大值的元素加入保护集。此缩减扩增元素过程循环执行，直到保护支撑集元素个数或残差内积值满足要求。因此，在缩减过程中选择正确支撑集元素加以保护是其中的关键点，避免了多次增减同一个正确元素的情况，提高重构准确率的同时也进一步提高重构速度。

算法主要步骤如下。

步骤 1　输入：观测向量 $\boldsymbol{y}$，测量矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$，稀疏度 K，迭代阈值 tol；初始化：支撑集 $S=\varnothing$，$\bar{S}=\boldsymbol{\Omega}$，正交补矩阵 $\boldsymbol{Q}_S=\boldsymbol{E}_{M\times M}$，正交补投影矩阵 $\boldsymbol{D}_S=\boldsymbol{\Phi}_{\bar{S}}$，信号 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}_{N\times 1}$，保护支撑集元素个数 L=0，缩减元素个数 b=0，非受保护支撑集 $B=\{S(L+1),S(L+2),\cdots,S(K)\}$，$t=0$。

步骤 2　获取初始支撑集：依据 $i=\arg\max\limits_{i\in\bar{S}}(\varDelta_S-\varDelta_{[S,i]})$，选择使残差内积减少量最大的元素 i 添加到 S，更新 $\boldsymbol{Q}_S$ 和 $\boldsymbol{D}_S$，重复步骤 K 次。

步骤 3　判断是否满足 $\varDelta_S<tol$，满足则算法结

束，否则计算 $\boldsymbol{P}_S$。

步骤 4 $b=b+1$。判断是否满足 $b+L\leqslant K$，满足则跳转步骤 5，不满足则算法结束。

步骤 5 执行删除元素的操作：依据 $\omega_b=\underset{\omega_b\in\frac{B}{\{\omega_1,\cdots,\omega_{b-1}\}}}{\arg\min}\left(\Delta_{\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}}}-\Delta_{\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_{b-1}\}}}\right)$，从非受保护支撑集 B 中选择使残差内积增加量最小的元素 ω_b，将 ω_b 从 S 集合中删除，计算 $\boldsymbol{Q}_{\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}}}$，$t=b$。

步骤 6 执行增添元素的操作：依据 $v_t=\underset{v_t\in\left[\omega_b,\cdots,\omega_1,\frac{\bar{S}}{\{v_t,\cdots,v_1\}}\right]}{\arg\max}\left(\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_1,\cdots,v_t\right]}\boldsymbol{\Phi}(:,v_t)\right)$,选择使残差内积减少量最大的元素 v_t，判断集合 $\{\omega_b,\cdots,\omega_t\}$ 和集合 $\{v_b,\cdots,v_t\}$ 包含元素是否相同，相同则转至步骤 4，否则 $t=t-1$，重复步骤 6 直至 $t=0$。

步骤 7 判断是否满足 $\Delta_{\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_b,\cdots,v_{t+1}\right]}<tol$ 条件，是则更新 $\boldsymbol{x}$，算法结束；否则判断是否满足 $\Delta_{\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_b,\cdots,v_{t+1}\right]}<\Delta_S$ 条件，是则更新 $S=\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_b,\cdots,v_{t+1}\right]$，计算 $\boldsymbol{Q}_{\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_b,\cdots,v_t\right]}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_b,\cdots,v_t\right]}$，$b=0$；否则直接跳转步骤 8。

步骤 8 执行元素先增后删一个元素的微调操作：分别依据 $i=\underset{i\in\bar{S}}{\arg\max}(\Delta_S-\Delta_{[S,i]})$ 和 $j=\underset{j\in[B,i]}{\arg\min}(\Delta_{[S,i]}-\Delta_{\frac{[S,i]}{\{j\}}})$，判断是否满足 $\Delta_{\frac{[S,i]}{\{j\}}}<\Delta_S$ 条件，满足则 $S=\frac{[S,i]}{\{j\}}$，更新 $\boldsymbol{Q}_S$、$\boldsymbol{D}_S$、$\boldsymbol{P}_S$ 和 $\boldsymbol{x}$，重复步骤 8，否则转至步骤 4。

步骤 9 选择待保护的元素：$L=L+1$。判断是否满足 $L<K$，满足则 $\boldsymbol{x}(S)=\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{m}(S)$，$l=\underset{l\in(L+1,L+2,\cdots,K)}{\arg\max}|x(l)|$，$b=b-1$；不满足则算法结束。

步骤 10 将挑选的保护元素置入保护支撑集：判断是否满足 $l=L$，满足则跳转步骤 9，不满足则 $b=b-l+L-1$，调换集合 S 中第 L 和 l 个元素的位置，更新 $\boldsymbol{P}_S$，转至步骤 4。

2.3 算法复杂度分析

LM-P 算法主要围绕支撑集元素的增加或删除过程，因此影响算法复杂度的主要因素为添加或删除支撑集元素的原则和主要参数 $\boldsymbol{Q}_S$、$\boldsymbol{D}_S$ 和 P_S 的更新。其中，添加原则 $\underset{i\in\bar{S}}{\arg\max}(\Delta_S-\Delta_{[S,i]})$，依据式(2)，其计算复杂度为 $O(MN)$。添加原则 $\underset{v_t\in\left[\omega_b,\cdots,\omega_1,\frac{\bar{S}}{\{v_b,\cdots,v_{t+1}\}}\right]}{\arg\max}\left(\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}_{\left[\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}},v_b,\cdots,v_{t+1}\right]}\boldsymbol{\Phi}(:,v_t)\right)$ 计算复杂度为 $O((|S|-b)N)$。删除原则 $j=\underset{j\in[B,i]}{\arg\min}\left(\Delta_{[S,i]}-\Delta_{\frac{[S,i]}{\{j\}}}\right)$，依据式(8)，其计算复杂度为 $O(|S|^2)$。删除原则 $\omega_b=\underset{\omega_b\in\frac{B}{\{\omega_1,\cdots,\omega_{b-1}\}}}{\arg\min}\left(\Delta_{\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_b\}}}-\Delta_{\frac{S}{\{\omega_1,\cdots,\omega_{b-1}\}}}\right)$，依据式(9)复杂度为 $O((|S|-b)^2)$。添加支撑集元素时，依据式(1)和式(3)，更新 $\boldsymbol{Q}_S$ 和 P_S 计算复杂度为 $O(MN)$。删除支撑集元素时，依据式(7)和式(12)更新 $\boldsymbol{Q}_S$ 和 P_S，计算复杂度为 $O(MN)$。因此支撑集添加或删除一个元素的复杂度最大为 $O(MN)$。

综上，LM-P 算法复杂度与 CoSaMP 算法相当，优于 OMP、SP 和 GPA 算法。

2.4 算法收敛性分析

依据 LM-P 算法对支撑集元素的删添规则，支撑集的变化可从以下两方面分析。

1) 删除的元素与添加的元素相同：支撑集 S 不会改变，残差趋于稳定。此时 $\|r^n\|_2^2=\|r^{n-1}\|_2^2$，即 $\|r^n\|_2=\|r^{n-1}\|_2$。

2) 删除的元素与添加的元素不同：删除的元素为残差变化量最小的元素 $i=\arg\min\left(\Delta_S-\Delta_{\frac{S}{\{i\}}}\right)$，添加的元素为残差变化量最大的元素 $j=\arg\max(\Delta_{[s,j]}-\Delta_S)$。设删除元素的集合为 w，则添加元素的集合 $v=\bar{S}\cup w$。当满足假设情况时，则删除元素带来的残差增量 $|d\Delta_1|=\left|\sum_{i\in w}\left(\Delta_S-\Delta_{\frac{S}{\{i\}}}\right)\right|$ 会小于添加元素所得的残差减量 $|d\Delta_2|=\left|\sum_{j\in v}\left(\Delta_{[s,j]}-\Delta_S\right)\right|$。又因为 $\Delta_S^n=\Delta_S^{n-1}+|d\Delta_1|-|d\Delta_2|$，所以 $\Delta_S^n<\Delta_S^{n-1}$，即 $\|r^n\|_2^2<\|r^{n-1}\|_2^2$，其中，$\Delta_S^n$ 为第 n 次迭代后的残差内积。

综上所述，$\|r^n\|_2^2\leqslant\|r^{n-1}\|_2^2$，即 $\|r^n\|_2\leqslant\|r^{n-1}\|_2$，当且仅当删除的元素与添加的元素相同时，等号成立。

易得，$\lim_{n\to\infty}\|r^n\|\to 0$。由此证明了算法的收敛性。

3　实验与结果分析

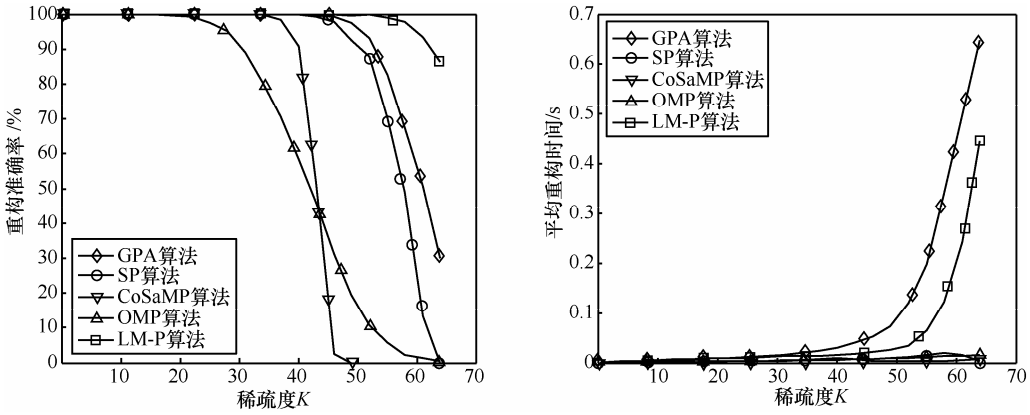
为了验证基于支撑集保护的回环匹配算法的优越性，分别选取 2 种不同特征的一维稀疏信号和二维图像信号，通过仿真将 LM-P 与 OMP、CoSaMP、SP 和 GPA 算法进行性能比较分析。仿真中，残差内积阈值设置为理想情况，即在 Matlab 仿真平台中取可识别的最小数 eps。在实际应用中，该阈值可以依据重构信号信噪比要求设定，与信噪比成反比。

3.1　重构非零值服从正态分布的一维稀疏信号

实验 1　选取一维稀疏信号 $\boldsymbol{x}$ 长度 $N=256$，并设置 $\boldsymbol{x}$ 任意 K 个元素为服从正态分布的非零值，其他 $N-K$ 个元素为 0。观测向量 $\boldsymbol{y}$ 长度 $M=128$，观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 为随机生成的 $M\times N$ 维高斯矩阵。图 1 为采用 OMP、CoSaMP、SP、GPA 和 LM-P 算法重构非零值服从正态分布的一维稀疏信号时，算法重构准确率、平均重构时间随信号稀疏度 $K\left(1\leqslant K\leqslant\frac{M}{2}\right)$ 变化的曲线图。

如图 1(a)所示，虽然随着信号的稀疏度增大，所有算法的重构准确率都显著下降，但各类算法精确重构所适用的信号稀疏度范围有显著差异，OMP、CoSaMP、SP、GPA 和 LM-P 算法要求信号稀疏度分别满足 $K\leqslant 22$、$K\leqslant 35$、$K\leqslant 43$、$K\leqslant 46$ 和 $K\leqslant 56$；对于稀疏度为观测值一半 $\left(K=\frac{M}{2}\right)$ 的 0-1 稀疏信号，OMP、CoSaMP、SP、GPA、LM-P 算法的重构准确率分别为 0%、0%、0%、30%和 86%；显然，对于高稀疏度信号，如果 $56<K\leqslant 64$，LB 算法依旧能够保证 86% 以上的重构准确率，而 CoSaMP 和 SP 算法分别在稀疏度接近 $\frac{M}{3}$ 和 $\frac{M}{2}$ 时重构准确率迅速下降，进一步反映了 CoSaMP 和 SP 算法的稀疏度门限效应缺陷。分析以上曲线原因，主要是 LM-P 算法在每次迭代过程中，受保护的支撑集中的元素只增不减，并且它遵循残差内积变化量最大的原则添加元素以及残差内积变化率最小量原则删除元素，使在稀疏度 K 取较大值时依然具有较高的重构准确率；对于其他算法，OMP 不具备回溯功能，SP 和 GPA 在 K 值较大时尤其是 $K>\frac{M}{2}$ 时无法保证测量矩阵中任意 $2K$ 列不相关，CoSaMP 则无法保证测量矩阵中任意 $3K$ 列不相关，所以 K 取较大值时 OMP、CoSaMP、SP 和 GPA 算法的重构准确率显著下降。

图 1(b)显示了各类算法平均重构时间与信号稀疏度的关系。由图可知，在稀疏度接近 $\frac{M}{3}$ ($K\leqslant 43$) 时，LM-P 算法的平均重构时间和 OMP、CoSaMP、SP 算法相当，均小于 GPA 算法的平均重构时间；在重构高稀疏度信号时，虽然 LM-P 算法平均重构时间大于 OMP、CoSaMP、SP 算法的平均重构时间，但结合图 1(a)可知，在稀疏度介于 $\frac{M}{3}$ 和 $\frac{M}{2}$ ($43\leqslant K\leqslant 56$)时，OMP、CoSaMP、SP 算法已不能保证准确重构，LM-P 算法依旧能够保证高概率重构信号。综合各算法重构方法可知，虽然实验中所有算法采取相同的迭代次数（1 000 次），且 LM-P 算法一次更新保护支撑集元素的时间复杂度最大为 $O(MN)$，但 OMP 算法只有增补元素没有删减元



(a) 算法重构准确率对比　　(b) 算法平均重构时间对比

图 1　不同重构算法重构非零值服从正态分布的稀疏信号的性能对比

素的过程，SP 和 CoSaMP 算法一次更新的元素个数分别为 K 个和 $2K$ 个。平均重构时间为迭代次数与单次迭代时间的乘积。因此，当 K 取较大值时，LM-P 的重构时间劣于 OMP，SP 以及 CoSaMP 算法，换取重构准确率的提高。

此外，综合图 1(a)和图 1(b)显示可知，在 $1 \leqslant K \leqslant 64$ 时，LM-P 算法的重构准确率和平均重构时间始终优于 GPA 算法。

以上实验结果表明，LM-P 算法在重构高稀疏度信号方面具有显著优势。

3.2　重构低信噪比稀疏信号

实验 2　同样选取一维含噪稀疏信号 $\boldsymbol{x}$ 长度 $N=256$，并随机设置 $\boldsymbol{x}$ 中的 K 个元素的幅值为 $1,2,\cdots,K$，其他 $N-K$ 个元素则设置为 0.2 倍幅值的高斯噪声，即信噪比为 $10\lg\dfrac{K}{0.04(N-K)}$ dB。显然，即使稀疏度高达观测值一半即 $K=128$ 时，信号的信噪比也约为 13.98 dB，为低信噪比信号。观测向量 $\boldsymbol{y}$ 长度 $M=128$，观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 为随机生成的 $M\times N$ 维高斯矩阵。OMP、CoSaMP、SP、GPA 和 LM-P 算法在重构一维低信噪比稀疏信号的重构准确率与信号稀疏度 K ($1 \leqslant K \leqslant 30$)之间的关系如图 2 所示。

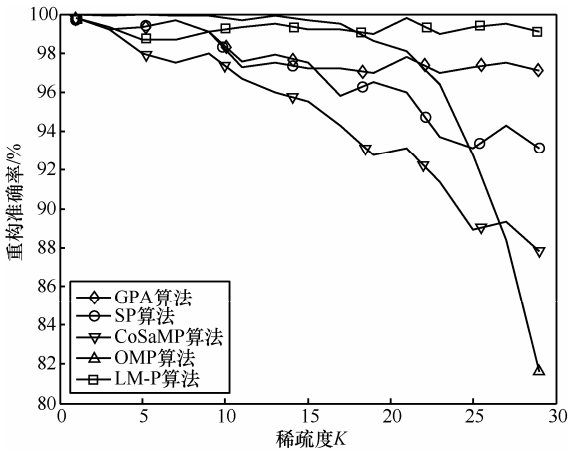


图 2　重构含噪稀疏信号的重构准确率对比

图 2 显示，采用 OMP 算法重构稀疏度 $K \leqslant 30$ 的低信噪比信号时，随着信号稀疏度增大，重构准确率迅速下降；而 CoSaMP、SP 和 GPA 算法重构低信噪比稀疏信号准确率受稀疏度的影响较小，重构准确率能够分别保证在 88%、91%和 97%；LM-P 算法重构低信噪比稀疏信号的准确率波动极小，重构准确率能够维持在 99%以上。

在处理低信噪比信号的过程中，因为 OMP 无删减元素过程，所以相对于其他算法较为光滑，但是由于 LM-P 算法能够最大概率增加正确支撑集元素并加以保护使部分元素不受噪声干扰，从而在重构低信噪比信号过程中始终保持较高的重构率和极小的波动。

以上实验结果表明，LM-P 算法是一种能在低信噪比信号中辨识出正确支撑集并加以保护的有效算法。

3.3　重构所需观测值数目比较

实验 3　为进一步分析 LM-P 算法的性能，对各类算法精确重构所需观测值数目进行了比较。以长度为 $N=256$，稀疏度为 K 的一维信号 f 为例，来测试同一稀疏度下不同算法实现精确重构对观测值数目 M 的要求。重构信号以 $\bar{f}$ 来表示。经过大量测试表明，当 $\dfrac{\|\bar{f}-f\|_2^2}{\|f\|_2^2} \leqslant 0.004$ 时，重构信号 $\bar{f}$ 与 f 信号重合，没有视觉差异，即可认定算法实现了准确重构。对同一稀疏度 K，依次采用 OMP、CoSaMP、SP、GPA、LM-P 算法对信号 f 进行重构，记录实现精确重构时的观测值数目。其中，将最大迭代次数设为 1 000。

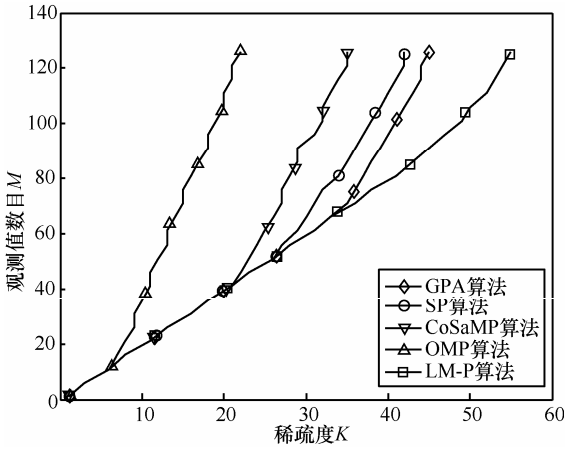


图 3　重构所需观测值数目比较

图 3 显示，OMP、CoSaMP、SP、GPA、LM-P 算法分别在稀疏度 $K<7$、$K<22$、$K<26$、$K<33$ 和 $K<48$ 时，所需观测值近似为稀疏度的 2 倍（$M=2K$），满足理论最小极限边界，其中，LM-P 算法在 $K>33$ 范围内所需观测值最少。如在 $K=40$ 时，LM-P 算法需要约 80 个观测值即可保证准确重构原始稀疏信号，而 GPA 和 SP 则分别需要至少 100 和 110 个观测值来保证准确重构原始稀疏信号，OMP 和 CoSaMP 则需要超过 128 个观测数据才有可能准

确重构。而当观测值相同时，LM-P 算法可重构信号的稀疏度范围最大，如图所示，当 $M=80$ 时，OMP、CoSaMP、SP、GPA、LM-P 算法能保证准确重构的信号稀疏度适用范围最大值分别为 16、28、33、37 和 40。

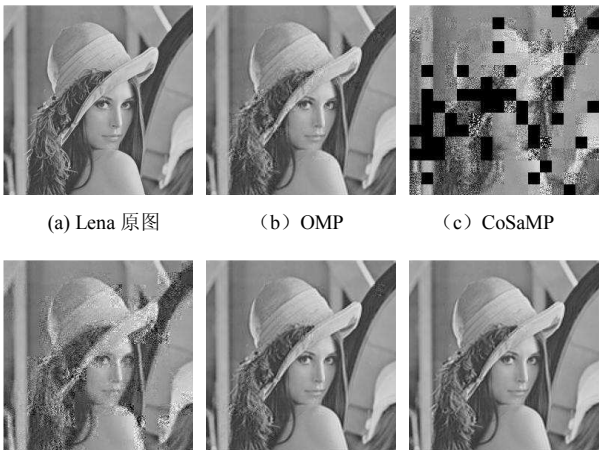
显然，信号稀疏度 K 越大，所需的观测值数越多才能保证更为精确的重构。在稀疏度递增的条件下，OMP，SP，CoSaMP 以及 GPA 算法逐次迭代挑选的元素越来越差，故需要更多的测量值来提高重构率；对于 LM-P 算法，由于引入保护机制，通过保护支撑集元素，避免了最优元素的误删，且以残差内积变化量来进行元素剔除和增加，保证了所得支撑集的正确性，故所需的测量值数目是最少的。

综上所述，LM-P 算法相对于 OMP、CoSaMP、SP 和 GPA 算法，重构具有相同稀疏度的信号所需观测值最少，实现了高概率重构原始稀疏信号前提下的高压缩率，有更宽广的适用环境。

3.4　重构二维图像信号

实验 4　为检验本文算法对二维图像信号的重构性能，选择标准 256×256 的 Lena 为测试图进行峰值信噪比（PSNR）的比较。实验采用离散余弦变换进行基稀疏变换，再通过重构算法还原信号，最后计算重构图像的峰值信噪比。实验中观测向量数 $M=128$ 。

如图 4 所示，对稀疏度为测量值一半的 Lena 图像信号进行重构时，LM-P 算法和 OMP、GPA 算法的重构效果没有视觉差异，均优于 CoSaMP 和 SP 算法。对 Lena 图进行相同的稀疏处理过程，依次采用 OMP、CoSaMP、SP、GPA、LM-P 算法对信号进行重构，重构信号的 PSNR 如表 2 所示。



(a) Lena 原图　（b）OMP　（c）CoSaMP

(d) SP　(e) GPA　(f) LM-P

图 4　不同算法重构 Lena 效果图

表 2　重构算法的峰值信噪比的对比（单位：dB）

算法名称	PSNR		
	$K=64$	$K=49$	$K=36$
OMP	31.013 7	32.013 7	30.608 9
CoSaMP	12.706 8	21.020 9	30.606 2
SP	22.853 1	31.515 0	30.610 2
GPA	31.949 0	32.067 0	30.610 5
LM-P	33.410 5	32.068 4	30.614 7

表 2 表明，当 $K=36$ 时，所有算法都能实现二维信号的精确重构，重构信号的 PSNR 大小由于测量矩阵为高斯随机矩阵而有细微区别。当 $K=49$ 时，LM-P 算法、OMP、GPA 算法重构信号的 PSNR 相当，略高于 SP 算法，显著高于 CoSaMP 算法。尽管 LM-P 和 OMP、GPA 算法选取支撑集元素的方式有所区别，但 3 个算法选取影响二维图像信号重构效果的绝大多数元素相同，重构信号的 PSNR 基本相同。SP 算法依据残差与观测值的相关性一次选取 K 个元素，由于无法保证测量矩阵任意 $2K$ 列不相关，重构准确率稍有下降。而 CoSaMP 算法因稀疏门限效应，重构准确率显著降低，PSNR 减小。当 $K=64$，LM-P 算法重构信号 PSNR 最高。这是由于 LM-P 算法能正确保护支撑集元素，在稀疏度较高情况下依然保持较高重构准确率。

4　结束语

本文提出的 LM-P 算法，利用正交补矩阵、正交补投影矩阵和子内积逆运算减少了残差内积变化量的计算复杂度，结合正确支撑集元素的保护机制提高了重构稀疏信号的准确率，扩展了可重构稀疏信号的稀疏度范围。实验结果表明，LM-P 算法能高准确率地重构稀疏度高达 $\frac{M}{2}$ 的一维稀疏信号，同时重构低信噪比稀疏信号时准确率波动性显著小于 OMP、SP、CoSaMP 和 GPA 算法，在相同稀疏度或相同观测值数目情况下的重构性能也优于以上算法，在重构二维图像信号时峰值信噪比性能也显著高于 CoSaMP 和 SP 算法，略高于 OMP、GPA 算法，是一种保证高准确率且计算复杂度低的贪婪重构稀疏信号算法。

参考文献：

[1]　DONOHO D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Information

Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

[2] CANDÈS E, WAKIN M. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.

[3] QAISAR S, BILAL R, IQBAL W, *et al*. Compressive sensing: from theory to applications, a survey[J]. Communications and Networks, 2013, 15(5):443-456.

[4] JIAO L C, YANG S Y, LIU F, *et al*. Development and prospect of compressive sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 18-22.

[5] ZHAO C H, XU Y L. Energy constraint Bayesian compressive sensing detection algorithm [J]. Journal on Communications, 2012, 33(10): 1-6.

[6] WANG W W, LIAO G S, ZHANG L. An imaging method based on compressive sensing for sparse aperture of SAR[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(12): 2487-2494.

[7] HU Y, ONGIE G, RAMANI S, *et al*. Generalized higher degree total variation (HDTV) regularization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2014, 23(6): 2423-2435.

[8] PEJOSKI S, KAFEDZISKI V, GLEICH D. Compressed sensing MRI using discrete nonseparable shearlet transform and FISTA[J]. Signal Processing Letters, IEEE, 2015, 22(10): 1566-1570.

[9] PEI T R, YANG S, LI Z T. Detouring matching pursuit algorithm in compressed sensing[J]. Journal of Computer Research and Development, 2014, 51(9): 2101-2107.

[10] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.

[11] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, *et al*. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.

[12] SAHOO S K, MAKUR A. Signal recovery from random measurements via extended orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(10): 2572-2581.

[13] NEEDELL D, TROPP J. Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 26(3): 302-321.

[14] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2009, 55(5): 2230-2249.

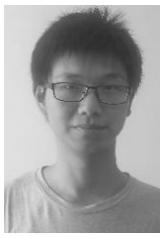
[15] VARADARAJAN B, KHUDANPUR S. Stepwise optimal subspace pursuit for improving sparse recovery[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(1): 27-30.

作者简介：

田淑娟（1982-），女，湖南攸县人，中南大学博士生，主要研究方向为压缩感知和无线传感器网络。

樊晓平（1961-），男，浙江绍兴人，博士，

裴廷睿（1970-），男，湖南通道人，博士，湘潭大学教授、博士生导师，主要研究方向为无线传感器网络、多媒体通信。



杨术（1988-），男，湖南长沙人，湘潭大学硕士生，主要研究方向为无线传感器网络、压缩感知。

李哲涛（1980-），男，湖南邵阳人，博士，湘潭大学副教授、硕士生导师，主要研究方向为无线传感器网络、压缩感知。