

基于 LMP 检验的正弦波频率估计可靠性评估

胡国兵^{1,2}, 徐立中¹, 鲍安平^{2,3}, 吴珊珊², 高燕²

(1.河海大学 计算机与信息学院, 江苏 南京 210098;

2. 南京信息职业技术学院 电子信息学院, 江苏 南京 210023; 3. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 针对正弦波信号频率估计结果的可靠性评估问题, 提出了一种基于局部最大势 (LMP, locally most powerful) 检验的处理方法。先建立正弦波频率估计可靠性分析的假设检验模型, 然后根据某一次特定频率估计值构造参考信号, 并将其与观测信号做相关累加。通过分析不同假设下相关累加值概率分布的参数差异, 利用 LMP 构造统计量, 并给出了相应的判决门限, 以实现可靠性判决。推导了 LMP 统计量的概率分布特性及其理论检测性能。仿真结果表明, 本算法可在较低信噪比条件下实现对单次正弦波频率估计结果的可靠性判决。

关键词: 正弦波频率估计; 可靠性检验; 局部最大势

中图分类号: TP302

文献标识码: A

Reliability test for frequency estimation of sinusoid based on LMP detection

HU Guo-bing^{1,2}, XU Li-zhong¹, BAO An-ping^{2,3}, WU Shan-shan², GAO Yan²

(1. School of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. School of Electronic Information Engineering, Nanjing College of Information Technology, Nanjing 210023, China;

3. School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: A reliability test method based on locally most powerful (LMP) detection was proposed to evaluate the frequency estimation of sinusoid. The hypothesis test was created at first, and then a reference signal was generated depending on the specific frequency estimation of the sinusoid. By analysis of the parameters differences from the probability distribution characteristics of the modulus of the cumulative sum series under the different two hypotheses, the reliability test for frequency estimate of sinusoid signal was performed by the proposed LMP-based statistic and threshold. The LMP statistic and its approximated theoretical detection performance were derived. Simulation results show that the proposed method can be used to verify the reliability for blind frequency estimation of sinusoid at low signal-to-noise ratio.

Key words: frequency estimation of sinusoid; reliability test; locally most powerful

1 引言

噪声中的正弦波信号频率估计是电子侦察、认知无线电等信号处理领域的经典课题之一, 其估计结果往往是正弦波其他参数(如幅度、相位、到达时间等^[1])或其他调制信号参数估计(如用离散多项式变换法对线性调频信号的参数估计^[2])的前提。众多学者对其算法进行了广泛研究^[1,3-10], 但在电子侦

察、认知无线电等非协作信号处理领域, 对信号的频率只能进行盲估计。因此, 对估计结果的正确、可靠与否进行评估, 显得尤为重要。

关于正弦波频率估计的可靠性评估, 一般可从2个角度来看。一是从算法设计者的角度。此时, 关注的是整个算法的统计性能, 可通过解析推导或蒙特卡罗仿真等方法对其估计均方根误差进行计算, 并与相应条件下的克拉美罗限进行比较, 以评估整个估计器

收稿日期: 2014-01-22; 修回日期: 2014-09-09

基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目(BK2011837); 江苏省“333 高层次人才培养工程”基金资助项目(BRA2013171); 江苏省“青蓝工程”基金资助项目

Foundation Items: The Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK2011837); The 333 Research Project of Jiangsu Province (BRA2013171); Qinglan Project of Jiangsu Province

的可靠性。文献[11~13]借助理论分析及仿真数据,通过比较信号参数估计的方差与实际计算得到的均方根误差值差异大小来评价信号参数估计的可靠性。但没有对单次信号参数估计,特别是正弦波信号频率估计的可信与否进行分析。二是从算法使用者的角度。此时,更值得关注的是具体某一次频率估计结果的性能。此处,称之为单次频率估计结果的可靠性评估。显然,在非协作条件下,对单次频率估计结果的可靠性做出判断,对误差大的不可靠估计结果舍弃或者重新处理,这样对于提高后续处理环节的可靠性、避免处理资源的浪费具有重要价值。若已知信号的真实频率及特定估计算法均方根误差,则可以计算单次频率估计的误差,并利用“ 3σ 准则”等方法,对其可靠性进行判定。但是需要满足2个必要条件:其一,已知信号的真实频率;其二,估计所采用频率估计方法的均方根误差。如果所用频率估计方法的均方根误差没有解析表达式(通常情况下较难获得),则需进行多次蒙特卡洛仿真,以得到多次频率估计值,利用样本的均方根误差作为总体均方根误差的估计。显然,在非协作条件下,进行单次信号频率估计时,这2个条件是难以达到的。因此,在非协作条件下,对正弦波单次频率估计的可靠性分析具有一定的困难。目前相关文献基本未见,仅有少量文献(如文献[14~17])研究了信号调制方式识别或者信号盲处理结果(将调制方式识别与参数估计看成一个整体环节进行处理),但不涉及正弦信号频率估计结果的可靠性评估。

本文针对高斯白噪声背景下正弦波信号单次频率估计结果的可靠性评估问题,提出一种基于局部最大势(LMP, locally most powerful)检验的处理方法。先建立单次频率估计可靠性评估的假设检验模型,后利用频率估计值建立参考信号,在分析参考信号与观测信号相关累加值概率分布参数差异的基础上,基于LMP检验推导相应的判决统计量及门限,以实现单次频率估计结果的可靠性分析。文中对所提算法的性能进行理论分析与仿真计算,验证了算法的有效性。

2 信号模型与假设

假定受高斯白噪声污染的复正弦信号的观测模型为

$$\begin{aligned} x(n) &= s(n) + w(n) \\ &= A \exp[j(2\pi f_0 n \Delta t + \theta)] + w(n), 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, A 、 f_0 、 θ 分别为信号 $s(n)$ 的幅度、载频及初相; N 为样本个数; $w(n)$ 为零均值复高斯白噪声,其实部与虚部相互独立,方差为 σ^2 。信噪比定义为 $SNR = 10 \lg A^2 / \sigma^2$ [dB]。为了便于分析,本文认为若满足 $|\Delta f| \leq 0.25 \Delta F$ (其中 Δf 为载频估计误差, $\Delta F = 1/(N \Delta t)$ 为量化频率间隔),则认为正弦波信号频率估计的精度较高,误差较小,判定为频率估计结果可靠。若用DFT法对频率进行估计时,当待估频率不在量化频率点上或信噪比过低时,最大谱线的位置会受噪声的影响发生偏移,导致估计误差变大,但在信噪比门限内,最大估计误差的绝对值一般小于1/4倍的量化频率间隔,换言之,若误差大于这个标准,认为其估计精度过低是合理的判断^[15]。于是,正弦波频率估计的可靠性评估可归结为如下假设检验

$$\begin{cases} H_0 : |\Delta f| \leq 0.25 \Delta F \\ H_1 : |\Delta f| > 0.25 \Delta F \end{cases} \quad (2)$$

3 可靠性检验算法

3.1 检验统计量

在 H_0 假设下,利用某种频率估计方法对信号的载频进行估计,得到估计值 \hat{f}_0 ,然后构造参考信号

$$y_0(n) = \exp(-j2\pi \hat{f}_0 n \Delta t), 0 \leq n \leq N-1 \quad (3)$$

将观测信号 $x(n)$ 与参考信号 $y_0(n)$ 做相关累加,得到

$$Z_0 = \sum_{m=0}^{N-1} [s(m) + w(m)] y_0(m) = s_0 + w_0 \quad (4)$$

其中, s_0 为相关累加后的信号部分, w_0 为相关累加后的噪声分量。

当 $\Delta f = 0$ 时,式(4)中的信号部分可写为

$$\begin{aligned} s_0 &= A \frac{\sin(\pi \Delta f \Delta t N)}{\sin(\pi \Delta f \Delta t)} e^{j\pi(N-1)\Delta f \Delta t + \theta} \Big|_{\Delta f=0} \\ &= NA \exp(j\theta) \end{aligned}$$

当 $|\Delta f| = 0.25 \Delta F$, 则有

$$\begin{aligned} s_0 &= A \frac{\sin(\pi \Delta f \Delta t N)}{\sin(\pi \Delta f \Delta t)} \exp(j\beta_0) = NA \operatorname{sinc}(0.25) \exp(j\beta_0) \\ &\approx 0.9 NA \exp(j\beta_0) \end{aligned} \quad (5)$$

其中, 辛克函数 $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$, 而 $\beta_0 = \frac{1}{4}$

$\pi \left(1 - \frac{1}{N}\right) + \theta$ 为相关累加后的等效相位。

进一步，将式(4)的相关累加值写成代数形式

$$Z_0 = Z_{R0} + jZ_{I0}$$

其中， Z_{R0} 、 Z_{I0} 分别为其实部与虚部，且两者相互独立。易知， Z_{R0} 、 Z_{I0} 分别服从高斯分布，其均值、方差分别为

$$\begin{cases} E(Z_{R0}) = \mu_{z_{R0}} \approx 0.9NA \cos \beta_0 \\ E(Z_{I0}) = \mu_{z_{I0}} \approx 0.9NA \sin \beta_0 \\ D(Z_{R0}) = D(Z_{I0}) = 0.5D(Z_0) = N\sigma^2 / 2 = \sigma_z^2 \end{cases} \quad (6)$$

显见，当 $|\Delta f|=0$ 时，有 $|E(Z_0)| = NA$ ；当 $|\Delta f|=0.25\Delta F$ 时，有 $|E(Z_0)| \approx 0.9NA$ ；当 $|\Delta f| \leq 0.25\Delta F$ 时， $|E(Z_0)| = |s_0| \geq 0.9NA$ 成立。

在 H_1 假设下，由于信噪比较低或其他原因，信号做 DFT 后的最大谱线不一定落在信号真实最大谱线应在的量化频率点或者相应量化间隔内，此时载频估计误差 $|\Delta f| > 0.25\Delta F$ 。将参考信号与观测信号相关累加值写为

$$Z_1 = s_1 + w_1$$

其中， s_1 为相关累加后的信号部分， w_1 为相关累加后的噪声分量。同样地，在 H_1 假设下，将

$$Z_1 = Z_{R1} + jZ_{I1}$$

其中， Z_{R1} 、 Z_{I1} 分别为其实部与虚部，且两者相互独立。同理， Z_{R1} 、 Z_{I1} 分别服从高斯分布，其均值、方差分别为

$$\begin{cases} E(Z_{R1}) = \mu_{z_{R1}} \approx \sin c(\Delta f / \Delta F) NA \cos \beta_0 \\ E(Z_{I1}) = \mu_{z_{I1}} \approx \sin c(\Delta f / \Delta F) NA \sin \beta_0 \\ D(Z_{R1}) = D(Z_{I1}) = 0.5D(Z_1) = \sigma_z^2 \end{cases} \quad (7)$$

同理可知，由于 $|\Delta f| > 0.25\Delta F$ ，故

$$|E(Z_1)| = |s_1| = NA |\text{sinc}(\Delta f / \Delta F)| < 0.9NA \quad (8)$$

根据 $\text{sinc}(x)$ 的性质可知，频率估计误差 $|\Delta f|$ 越大，其 $|E(Z_1)|$ 下降幅度越大，如当频率估计误差 $|\Delta f|=0.5\Delta F$ 时， $|E(Z_1)|$ 下降到 NA 的 63.66%。若令频率估计误差因子 $\delta = \Delta f / \Delta F$ ，则定义比值 $r = \frac{|E(Z_i)|}{NA} = \frac{\sin(\pi\delta)}{N\sin(\pi\delta/N)}$ ， $i=0,1$ 。图 1 所示为比值 r 与频率估计误差因子 δ 的关系曲线。由图可知：当 $\delta < 0.25$ 时， $r > 0.9$ ；当 $\delta > 0.25$ 时， r 随着 δ 的增加而减小。也就是说可以通过观测相关累加值与 NA 比值的大小来推断频率估计偏差是否过大，从

而对单次频率估计的可靠性做出判定。

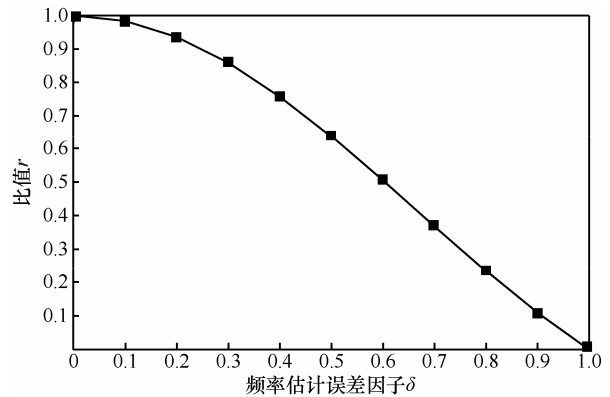


图 1 频偏对相关累加值的影响

为了消除相位的影响，定义标准变量 $V = |Z|^2 / \sigma_z^2$ ，则随机变量 V 的概率密度函数为

$$p_{V|H_i}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2}(v + \lambda_i)\right] I_0(\sqrt{\lambda_i v}), v > 0 \\ 0, v < 0 \end{cases} \quad (9)$$

式(9)为非中心 χ^2 密度的标准形式， $I_0(x)$ 为第一类零阶修正贝塞尔函数， $\lambda_i = (\mu_{z_{Ri}}^2 + \mu_{z_{Ii}}^2) / \sigma_z^2$ 为非中心参数。根据前述的分析，可知在 H_0 假设下，由于 $|\Delta f| \leq 0.25\Delta F$ ，有

$$\begin{aligned} \lambda_0 &\geq \lambda_i = \frac{2[NA \text{sinc}(0.25)]^2}{N\sigma^2} \\ &= 2[\text{sinc}(0.25)]^2 NSNR \approx 1.62NSNR \end{aligned} \quad (10)$$

其中， λ_i 表示当 $|\Delta f|=0.25\Delta F$ 时的非中心参数值。在 H_1 假设下， $|\Delta f| > 0.25\Delta F$ ，即 $\delta > 0.25$ ，故有

$$\lambda_1 = (\mu_{z_{R1}}^2 + \mu_{z_{I1}}^2) / \sigma_z^2 = 2[\text{sinc}(\delta)]^2 NSNR < \lambda_i$$

显然，在 2 种假设下，统计量 V 都服从非中心 χ^2 分布，其区别在于非中心参数不相同，于是式(2)的假设检验问题转为如下参数检验问题

$$\begin{cases} H_0 : \lambda \geq \lambda_i \\ H_1 : \lambda < \lambda_i \end{cases} \quad (11)$$

对于 H_1 假设考虑 2 种情况：第一种，称之为小偏差情形，即当频率估计绝对误差 $|\Delta f|$ 略大于 $0.25\Delta F$ 时，虽然 $\lambda_1 < \lambda_i$ ，但 2 个参数之间相差不大；第二种称之为大偏差情形，即频率估计绝对误差 $|\Delta f|$ 远大于 $0.25\Delta F$ 时，此时 $\lambda_1 \ll \lambda_i$ ，两者相差较大，此时便于区分。一般而言，在信号处理中，只要调制方式识别正确，频率估计误差一般也不会过

大, 因此, 第一种情形出现的概率更大, 为此本文主要针对第一种情形做研究。

3.2 判决规则与门限

先考虑式(11)的退化形式

$$\begin{cases} H'_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda < \lambda_0 \end{cases} \quad (12)$$

与式(11)不同之处在于零假设下 $\lambda = \lambda_0$ 。后面将说明, 式(11)与式(12)具有相同的拒绝域。

在 H_1 假设下, 当参数 λ 与 λ_0 差异较小, 但仍有 $\lambda < \lambda_0$ 存在。考虑奈曼皮尔逊(NP, Neyman Pearson)准则, 如果 $\frac{p(v; \lambda)}{p(v; \lambda_0)} > \gamma$, 则判 H_1 成立, 式中 $\gamma > 0$ 为

特定门限。对上式两边取对数, 有

$$\ln p(v; \lambda) - \ln p(v; \lambda_0) > \ln \gamma \quad (13)$$

当 $\lambda_0 - \lambda$ 较小时, $\ln p(v; \lambda)$ 可以在 $\lambda = \lambda_0$ 处进行一阶泰勒级数展开, 得

$$\ln p(v; \lambda) = \ln p(v; \lambda_0) + \left. \frac{\partial \ln p(v; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \quad (14)$$

将上式移项得

$$\ln p(v; \lambda) - \ln p(v; \lambda_0) = \left. \frac{\partial \ln p(v; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \quad (15)$$

从而有

$$\left. \frac{\partial \ln p(v; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) > \ln \gamma$$

则判 H_1 。由于 $\lambda < \lambda_0$, 故有

$$\left. \frac{\partial \ln p(v; \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} < -\frac{\ln \gamma}{(\lambda_0 - \lambda)}$$

则判 H_0 。

LMP 检验统计量^[18]定义为

$$T_{LMP}(V) = \frac{\left. \frac{\partial \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}}{\sqrt{I(\lambda_0)}} \leq \gamma_1, \text{ 判 } H_1 \text{ 成立} \quad (16)$$

其中, $\gamma_1 < 0$ 为判决门限, $I(\lambda_0)$ 为当 $\lambda = \lambda_0$ 时的 Fisher 信息矩阵, 定义为

$$I(\lambda) = -E \left\{ \frac{\partial^2 \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda^2} \right\} \quad (17)$$

下面分别求取 $\frac{\partial \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda}$ 及 $\frac{\partial^2 \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda^2}$ 。易知, $p_{v|H_i}(v), i=0,1$ 在 2 种假设下除了参数 λ_i 取值不同外, 形式相同, 不妨写作

$$p(v; \lambda) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} (v + \lambda) \right] I_0(\sqrt{\lambda v}), v > 0$$

易得

$$\ln[p(v; \lambda)] = \ln(1/2) - \frac{1}{2} (v + \lambda) + \ln[I_0(\sqrt{\lambda v})], v > 0 \quad (18)$$

$$\text{令 } u = \sqrt{\lambda v}, \text{ 则 } u'_\lambda = \frac{1}{2} v^{1/2} \lambda^{-1/2}, u''_\lambda = -\frac{1}{4} v^{1/2} \lambda^{-3/2},$$

于是

$$\frac{\partial \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} + \frac{[I_0(u)]'_u \cdot u'_\lambda}{I_0(u)} = -\frac{1}{2} + \frac{I_1(u) \cdot u'_\lambda}{I_0(u)} \quad (19)$$

上式中, $[I_0(u)]'_u = I_1(u)$ ^[19]。对于式(17), 有

$$\frac{\partial^2 \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda^2} = \frac{I_1(u) u''_\lambda}{I_0(u)} + u'_\lambda \left[\frac{I_1(u)}{I_0(u)} \right]'_\lambda \quad (20)$$

考虑到

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_1(u)}{I_0(u)} \right]'_\lambda &= \frac{[I_1(u)]'_\lambda I_0(u) - I_1(u) [I_0(u)]'_\lambda}{I_0^2(u)} \\ &= \frac{[I_1(u)]'_u u'_\lambda}{I_0(u)} - \frac{I_1^2(u) u'_\lambda}{I_0^2(u)} \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $I_i(x), i=0,1,2$ 为第一类 i 阶修正贝塞尔函数。

由于 $[I_1(u)]'_u = \frac{1}{2} [I_2(u) + I_0(u)]$ ^[19], 于是式(21)可写为

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_1(u)}{I_0(u)} \right]'_\lambda &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{I_2(u)}{I_0(u)} \right] u'_\lambda - \frac{I_1^2(u)}{I_0^2(u)} u'_\lambda \\ &= u'_\lambda \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{I_2(u)}{I_0(u)} - \frac{I_1^2(u)}{I_0^2(u)} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

将式(22)代入式(20), 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda^2} &= \left[\frac{I_1(u) \cdot u''_\lambda}{I_0(u)} \right]'_\lambda \\ &= \frac{I_1(u) \cdot u''_\lambda}{I_0(u)} + (u'_\lambda)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{I_2(u)}{I_0(u)} - \frac{I_1^2(u)}{I_0^2(u)} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

考虑到由于相关累加至最后一点, 信噪比增益最大, 因此 $u = \sqrt{\lambda v} \gg 1$, 所以 $I_0(u)$ 、 $I_1(u)$ 、 $I_2(u)$ 做如下近似处理^[19]

$$\begin{cases} I_2(u) \approx \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} e^{\frac{4}{u}} \approx \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left(1 - \frac{2}{u} \right) \\ I_1(u) \approx \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} e^{\frac{1}{2u}} \approx \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left(1 - \frac{1}{2u} \right) \\ I_0(u) \approx \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \end{cases} \quad (24)$$

$$\text{令 } r_{20} = \frac{I_2(u)}{I_0(u)} = \left(1 - \frac{2}{u}\right) \approx 1, r_{10} = \frac{I_1(u)}{I_0(u)} = \left(1 - \frac{1}{2u}\right) \approx 1,$$

于是式(19)及式(20)分别可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln[p(v; \lambda)]}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{2} + \frac{I_1(u)u'_\lambda}{I_0(u)} \\ &\approx u'_\lambda - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(v^{1/2}\lambda^{-1/2} - 1) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln(p(v; \lambda))}{\partial \lambda^2} &= \left[\frac{I_1(u)u''_\lambda}{I_0(u)} \right]_\lambda \\ &= \frac{I_1(u)u''_\lambda}{I_0(u)} + (u'_\lambda)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{I_2(u)}{I_0(u)} - \frac{I_1^2(u)}{I_0^2(u)} \right] \\ &= r_{10}u''_\lambda + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r_{20} - r_{10}^2 \right] (u'_\lambda)^2 \approx u''_\lambda \end{aligned} \quad (26)$$

于是

$$\begin{aligned} I^{-1}(\lambda) &\approx \frac{1}{-E\{u''_\lambda\}} = \frac{1}{-E\left\{-\frac{1}{4}v^{1/2}\lambda^{-3/2}\right\}} \\ &= \frac{4}{\lambda^{-3/2}E(v^{1/2})} \end{aligned} \quad (27)$$

下面求取 $E\{v^{1/2}\}$ 。令 $g = v^{1/2} = |z|/\sigma_z$ ，则 g 服从莱斯分布，其概率密度为

$$p_G(g) = g \exp\left[-\frac{1}{2}(g^2 + \kappa^2)\right] I_0(\kappa g), g > 0 \quad (28)$$

其中， $\kappa^2 = \lambda$ 。于是

$$E\{v^{1/2}\} = E\{g\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} L_{1/2}(-\lambda/2) \quad (29)$$

其中， $L_{1/2}(-\lambda/2)$ 为 Laguerre 多项式^[20]。当 $\lambda/2$ 较大时，可以证明， $L_{1/2}(-\lambda/2) \approx \frac{\lambda+1}{\sqrt{\pi\lambda/2}}$ (具体证明见附录)，故有 $E\{v^{1/2}\} \approx \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ 。于是，在 H_0' 假设下，有

$$I^{-1}(\lambda) \approx \frac{4}{\lambda^{-3/2}(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})} = \frac{4}{\lambda^{-1} + \lambda^{-2}} \quad (30)$$

代入式(16)，得到

$$T_{LMP}(V) = \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} \leq \gamma_1, \text{ 则判 } H_1 \text{ 成立} \quad (31)$$

根据文献[18]， $T_{LMP}(V) | H_0$ 近似服从 $N(0,1)$ 标准正态分布。从而有

$$P_r\{T_{LMP}(V) \leq \gamma_1; H_0'\} \approx \Phi(\gamma_1) \quad (32)$$

其中， $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 为标准正态分布的分布函数，通过计算标准正态分布逆概率可得到近似的门限

$$\gamma_1 = \Phi^{-1}(\alpha) \quad (33)$$

其中， $\Phi^{-1}(x)$ 为逆标准正态累积分布函数， α 为式(12)定义检测器的虚警概率。这样，式(31)的判决式可简化为

$$\text{若 } T_{LMP}(V) \leq \gamma_1, \text{ 则判 } H_1, \text{ 否则判 } H_0 \quad (34)$$

由前述分析可知，对于式(12)而言，在 H_0' 假设下参数 λ 正好等于 λ_t ，因此门限由下式

$$P\{D_1 | H_0'\} = P_{\lambda=\lambda_t} \left\{ \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} \leq \gamma_1 \right\} = \alpha \quad (35)$$

确定。而对于式(11)，在 H_0 假设下参数 λ 大于或者等于 λ_t ，即

$$\begin{aligned} P\{D_1 | H_0\} &= P_{\lambda \geq \lambda_t} \left\{ \frac{g - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \leq \gamma_1 \right\} \\ &\leq P_{\lambda=\lambda_t} \left\{ \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} \leq \gamma_1 \right\} = P\{D_1 | H_0'\} = \alpha \end{aligned} \quad (36)$$

上式中不等号成立的原因在于当 $\lambda \geq \lambda_t$ 时，

$$\frac{g - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \leq \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}}$$

$$\text{从而事件 } \left\{ \frac{g - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \leq \gamma_1 \right\} \subseteq \left\{ \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} \leq \gamma_1 \right\}.$$

要控制 $P\{D_1 | H_0\} \leq \alpha$ ，只需令

$$P\{D_1 | H_0'\} = P_{\lambda=\lambda_t} \left\{ \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} \leq \gamma_1 \right\} = \alpha$$

从而解出其门限。从上述分析可知，式(11)与其退化形式具有相同的拒绝域，因此式(34)的判决规则仍适用于式(11)定义的假设检验。

综上所述，本文算法可小结如下。

- 1) 参考信号建立：利用特定算法对正弦波信号的频率进行估计，并按式(3)构建参考信号。
- 2) 统计量构造：将构造的参考信号与原信号进行相关累加，得到检验统计量 $T_{LMP}(V)$ 。
- 3) 统计判决：根据设定的虚警概率 α ，计算

出判决门限 γ_1 , 若 $T_{LMP}(V) \leq \gamma_1$, 则判 H_1 , 反之判 H_0 。

图 2 所示为通过仿真得到的统计量 $T_{LMP}(V)$ 在不同频率误差因子时的统计直方图及根据式 (33) 计算的判决门限。仿真条件为: 信号载频取 19.081 MHz, 样本点数 1024, 初相位 $\pi/6$, 频率估计误差因子 $\delta = 0.1, 0.25, 0.4$, 虚警概率 α 取 0.001, 信噪比 0 dB, 仿真次数 1 000 次。由图可见, 3 种不同情形下, 统计量 $T_{LMP}(V)$ 统计直方图近似服从正态分布, 所选定的判决门限能较好地地区分 H_0 假设与 H_1 假设。

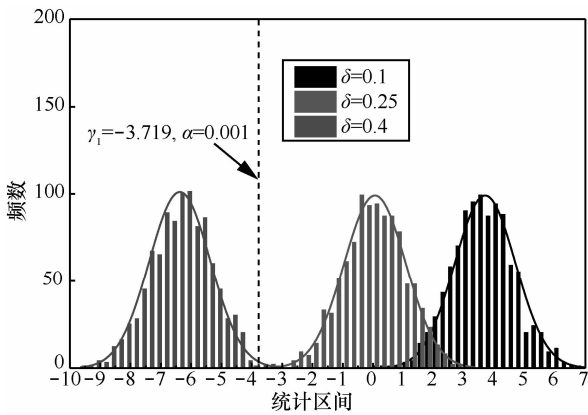


图 2 不同频率误差因子时统计量的统计直方图及判决门限

4 性能分析

在 H_0 假设下, 当 $\lambda = \lambda_t$, 记统计量 $T_{LMP}(V) | H_0$ 为 $T_{H_0}^\lambda = \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} \sim N(0, 1)$ 。当 $\lambda \geq \lambda_t$, 记统计量

$T_{LMP}(V) | H_0$ 为 $T_{H_0}^\lambda = \frac{g - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \sim N(0, 1)$ 。显然, 当 $\lambda > \lambda_t$ 时, 检验统计量

$$T_{H_0}^\lambda = \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} = \frac{g - (\sqrt{\lambda} - \Delta)}{\zeta \sqrt{1 + \lambda^{-1}}} = \frac{g - \sqrt{\lambda}}{\zeta \sqrt{1 + \lambda^{-1}}} + \frac{\Delta}{\zeta \sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \quad (37)$$

其中, $\Delta = |\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_t}|$, $\zeta = \frac{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}} > 1$ 。根据高斯

变量的性质, 可知式(37)中 $T_{H_0}^\lambda \sim N(\mu_{H_0}^\lambda, \sigma_{H_0}^\lambda)$, 其中

$\mu_{H_0}^\lambda = \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}}$, $\sigma_{H_0}^\lambda = \frac{1}{\zeta}$ 。于是, 式(11)定义的检测器的虚警概率为

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P\{T_0^{\lambda_0} \leq \gamma_1 | H_0\} \\ &= \int_{-\infty}^{\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{H_0}^{\lambda_0}} \exp\left[-(x - \mu_{H_0}^{\lambda_0})^2 / 2(\sigma_{H_0}^{\lambda_0})^2\right] dx \\ &\approx \Phi\left(\frac{\gamma_1 - \mu_{H_0}^{\lambda_0}}{\sigma_{H_0}^{\lambda_0}}\right) \end{aligned} \quad (38)$$

其中, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt$ 为标准正态分布函数。

在 H_1 假设下, 当 $\lambda < \lambda_t$ 时, 记统计量 $T_{LMP}(V) | H_1$ 为 $T_{H_1}^\lambda = \frac{g - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \sim N(0, 1)$ 。同理, 当 $\lambda < \lambda_t$ 时, 检验统计量

$$T_{H_1}^\lambda = \frac{g - \sqrt{\lambda_t}}{\sqrt{1 + \lambda_t^{-1}}} = \frac{g - (\sqrt{\lambda} + \Delta)}{\zeta \sqrt{1 + \lambda^{-1}}} = \frac{g - \sqrt{\lambda}}{\zeta \sqrt{1 + \lambda^{-1}}} - \frac{\Delta}{\zeta \sqrt{1 + \lambda^{-1}}} \quad (39)$$

且 $T_{H_1}^\lambda \sim N(\mu_{H_1}^\lambda, \sigma_{H_1}^\lambda)$ 正态分布, 其中 $\mu_{H_1}^\lambda = \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \lambda_0^{-1}}}$, $\sigma_{H_1}^\lambda = \frac{1}{\zeta}$ 。于是, 检测概率

$$\begin{aligned} P_D &= \Pr\{T_{H_1}^\lambda \leq \gamma_1 | H_1\} \\ &= \int_{-\infty}^{\gamma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{H_1}^{\lambda_t}} \exp\left[-(x - \mu_{H_1}^{\lambda_t})^2 / 2(\sigma_{H_1}^{\lambda_t})^2\right] dx \\ &\approx \Phi\left(\frac{\gamma_1 - \mu_{H_1}^{\lambda_t}}{\sigma_{H_1}^{\lambda_t}}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

由式(35)~式(40)可知。

1) 在判决门限一定的情况下, 检测概率 P_D 和虚警概率 P_{FA} 均与 ζ 、 Δ 及 λ 有关, 而 ζ 、 Δ 及 λ 均与样本长度 N 、信噪比 SNR 及频率误差因子 δ 有关。就检测概率 P_D 而言, 样本长度、信噪比及频率误差因子成正比; 就虚警概率而言, 它与样本长度、信噪比及频率误差因子成反比。相同条件下, 检测概率 P_D 与虚警概率 P_{FA} 不能同时变好。

2) 前述确定判决门限 γ_1 的虚警概率 α 是定义在式(12)检测器下的, 计算时对应的是 H_0' 假设下 $T_{LMP}(V)$ 概率密度函数, 而式(38)所给定的虚警概率 P_{FA} 则对应于式(11)检测器, 计算时对应于 H_0 假设下 $T_{LMP}(V)$ 的概率密度函数, 即

$$\begin{aligned} P_{FA} &= P\{T_0^{\lambda_0} \leq \gamma_1 | H_0\} \approx \Phi\left(\frac{\gamma_1 - \mu_{H_0}^{\lambda_0}}{\sigma_{H_0}^{\lambda_0}}\right) \\ \alpha &= P\{T_0^{\lambda_0} \leq \gamma_1 | H_0'\} \approx \Phi(\gamma_1) \end{aligned}$$

由于 $\sigma_{H_0}^\lambda \leq 1$, 故有 $\frac{\gamma_1 - \mu_{H_0}^\lambda}{\sigma_{H_0}^\lambda} < \frac{\gamma_1}{\sigma_{H_0}^\lambda} \leq \gamma_1$, 因此

$$P_{FA} \leq \alpha.$$

5 仿真与分析

仿真的目的是为检验第 4 节中对检测性能理论分析的精度, 并考察本文方法在不同条件下的性能。假设接收到的观测信号 $x(n)$ 为被加性高斯白噪声污染的复正弦波信号, 设定采样频率 100 MHz, 每种条件下仿真次数为 1 000 次。

图 3 所示为不同虚警概率 α 时, 由式(40)得到的检测概率 P_D 与数值仿真得到检测概率的比较。仿真条件为: 信号载频取 19.081 MHz, 样本点数 1 024, 初相位 $\pi/6$, 频率估计误差因子 $\delta=0.4$, 虚警概率 α 分别取 0.1、0.01、0.001, 信噪比从 -12dB 变化到 10 dB, 步长 2 dB。由图可见: 1) 虚警概率 α 分别取 0.1、0.01、0.001 时, 理论检测概率与仿真得到的检测概率在不同信噪比条件下均能很好吻合, 这也印证了前述公式推导的正确性; 2) 相同样本点数及信噪比时, 虚警概率 α 越大, 检测概率也越大; 反之, 亦然; 3) 样本点数及虚警概率 α 一定时, 检测概率随信噪比的增加变大。

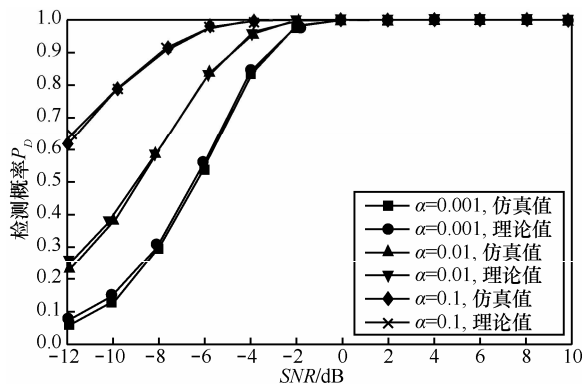


图 3 不同虚警概率条件下检测概率的理论值与仿真值对比

图 4 所示为设定不同的虚警概率 α 时, 由式(38)得到的理论虚警概率 P_{FA} 与数值仿真得到虚警概率的比较。仿真条件除频率估计误差因子 $\delta=0.1$ 外, 其他均与图 3 相同。由图可见: 1) 虚警概率 α 分别取 0.1、0.01、0.001 时, 理论虚警概率 P_{FA} 与仿真得到的虚警概率在不同信噪比条件下能近似吻合, 信噪比较低时, 略有误差, 但仍在合理范围内; 2) 式(12)定义检测器的虚警概率 P_{FA} 小于式(11)定义的虚警概率 α , 印证前述的分析。

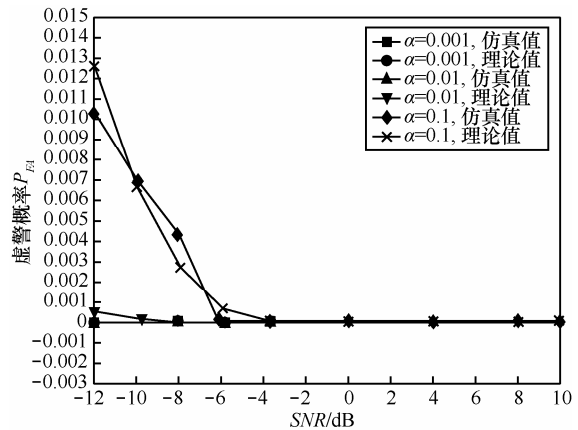


图 4 不同条件下虚警概率的理论值与仿真值对比

图 5 所示为本文算法在不同频率估计误差因子条件下检测性能的理论值与仿真值之间的对比。仿真条件中频率估计误差因子 δ 分别取 0.3、0.4、0.5, 虚警概率 0.01, 其他参数与图 4 相同。由图可见: 1) 不同频率估计误差时, 理论检测概率与仿真估计的检测概率能很好的吻合, 进一步印证了前述公式的正确性; 2) 相同信噪比及相同样本点数时, 频率估计误差因子越大, 则说明频率估计误差偏离 $\Delta F/4$ 越远, 检测概率增加。

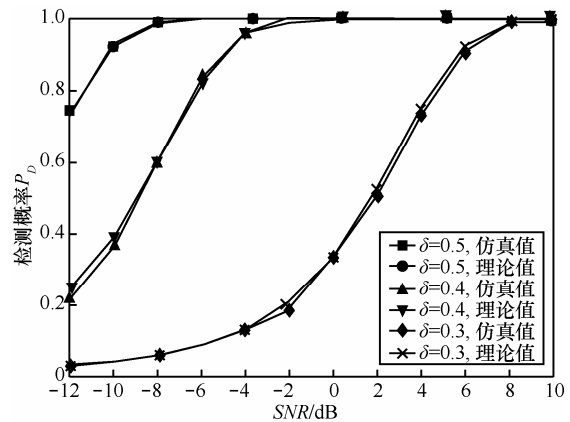


图 5 检测性能与频率估计误差因子的关系

图 6 所示为本文算法的检测性能与样本点数的关系示意。仿真条件: 信号载频取 19.081 MHz, 样本点数分别取 512、1 024、2 048 3 种, 初相位 $\pi/6$, 频率估计误差因子 $\delta=0.4$ 。由图可知: 1) 在 3 种不同样本点数条件下, 理论检测概率与仿真值能较好的吻合, 样本点数为 512 点、信噪比小于 -4 dB 时, 略有误差, 其原因在于样本点数小且信噪比低时, NSNR 的值也相应小, 前述分析中的相关近似表达式的性能略变差; 2) 在相同信噪比条件下, 虚警概率一定时样本点数越大, 检测概率也越大。

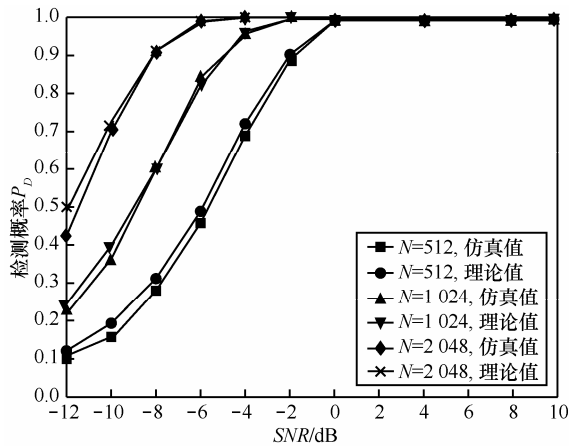


图6 检测性能与样本点数的关系

图7所示为本文算法的检测性能与载频大小的关系示意。仿真条件：信号载频分别取 19.081 MHz, 20.081 MHz, 21.081 MHz, 样本点数取 1 024, 初相位 $\pi/6$, 频率估计误差因子 $\delta=0.4$, 虚警概率 0.01。由图可知：在 3 种不同载频条件下，本文算法的检测性能趋于一致，且与理论检测概率很好地吻合，即本算法的检测性能不受载频变化的影响。实际上，前述统计量及性能分析中也可以看出，统计量与载频估计误差有关，与其绝对大小无关。

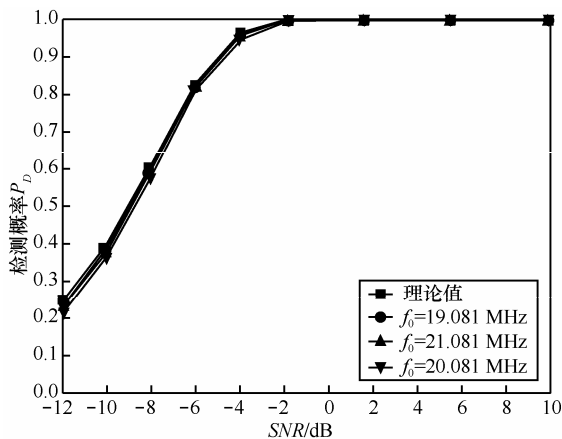


图7 算法的性能与载频大小的关系

图8所示为算法的检测性能与待估载频是否位于量化频率点的关系示意。仿真条件：信号载频分别取 19.532 51MHz(正好在量化频率点上)和 19.081 MHz(不在量化频率点上), 样本点数取 1 024, 初相位 $\pi/6$, 频率估计误差因子 $\delta=0.7$, 虚警概率为 0.1。由图可知：1) 在信噪比较低时，无论载频率是否在量化频率点上，本算法仍可有效检测出不可靠性估计情形，信噪比大于 -20 dB 时，检测概率可达 90%以上，信噪比为 -16.7 dB 时，2 种条件下检

测概率均可达 99%以上；2) 信噪比在合理范围内，2 种情形下仿真得到的检测概率与理论检测概率能近似吻合，信噪比过低时，由于理论检测概率公式推导的假设条件因信噪比下降而被破坏，导致仿真性能与近似理论性能存在一定的误差，但仍在可容忍的范围内。

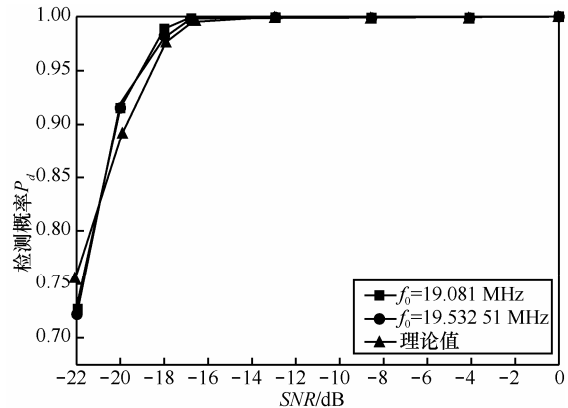


图8 算法性能与待估频率位置的关系

6 结束语

本文针对正弦波频率估计的可靠性评估问题，提出了一种基于 LMP 检验的处理算法。其基本思想为：首先确定可靠性评估的假设检验模型，而后根据某一次频率估计值建立相应参考信号，并与观测信号做相关累加，将相关累加值作为统计量，经必要转换得到检测统计量及相应的判决门限，对单次频率估计结果的可靠与否做出判决。文中推导了统计量及检测性能的解析表达式，并将仿真结果与理论分析相比较印证了本文算法的有效性。仿真结果表明，本文算法在低信噪比条件下仍具有很高的检测正确率，具有一定工程实用价值。

附录 近似式 $L_{1/2}(-\lambda/2) \approx \frac{\lambda+1}{\sqrt{\pi\lambda/2}}$, $\lambda \gg 1$ 的

证明

证明 由文献[20]可知，Laguerre 多项式

$$L_{1/2}(x) = e^{x/2}[(1-x)I_0(-x/2) - xI_1(-x/2)] \quad (41)$$

考虑到当 $x \gg 1$ 时，有 $I_0(u) \approx I_1(u) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ ，并将

$x = -\lambda/2$ 代入上式，得

$$L_{1/2}(-\lambda/2) \approx \frac{e^{-\lambda/4}(1+\lambda)e^{\lambda/4}}{\sqrt{\lambda\pi/2}} = \frac{(1+\lambda)}{\sqrt{\lambda\pi/2}}$$

参考文献：

- [1] RIFE D C, BOORSTYN R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observation[J]. IEEE Transactions on Inform Theory, 1974, 20(5): 591-598.
- [2] PELEG S B, LINEAR P. FM signal parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1991, 27(7): 607-615.
- [3] RIFE D C, VINCENT G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. Bell Syst Tech J, 1970, 49(2): 197-228.
- [4] JAIN V K. High-accuracy analog measurements via interpolated FFT[J]. IEEE Transactions on Instrument and Measurement, 1979, 28(2): 113-123.
- [5] ABATZOGLOU T. A fast maximum likelihood algorithm for frequency estimation of a sinusoid based on Newton's method[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1985, 33(1): 77-89.
- [6] KAY S. A fast and accurate single frequency estimator[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(12): 1987-1990.
- [7] 邓振淼, 刘渝, 王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(4): 474-477.
DENG Z M, LIU Y, WANG Z Z. Modified Rife algorithm for frequency estimation of sinusoid wave[J]. Journal of Data Acquisition & Processing, 2006, 21(4): 474-477.
- [8] 邓振淼, 刘渝. 正弦波频率估计的牛顿迭代方法初始值研究[J]. 电子学报, 2007, 35(1): 104-107.
DEGN Z M, LIU Y. The starting point problem of sinusoid frequency estimation based on Newton's method[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(1): 104-107.
- [9] PANTAZIS O R, YANNIS S. Iterative estimation of sinusoidal signal parameters[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 17(5): 461-464.
- [10] DASH P K, SHAZIA H. Fast recursive algorithm for the estimation of frequency, amplitude, and phase of noisy sinusoid[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2011, 58(10): 4847-4856.
- [11] LI X R, ZHAO Z, JILKOV V P. Practical measures and test for credibility of an estimator[A]. Proc Workshop on Estimation, Tracking, and Fusion Tribute to Yaakov Bar-Shalom[C]. 2001. 481-495.
- [12] LI X R, ZHAO Z, JILKOV V P. Estimator's credibility and its measures[A]. Proc IFAC 15th World Congress[C]. 2002.
- [13] LIU G D, YU W S. Estimation of the amplitude of sinusoid in white noise[A]. Proceedings of the 25th Chinese Control Conference[C]. 2006. 529-534.
- [14] 胡国兵. 雷达信号调制识别相关技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2011.
HU G B. Study on Related Techniques for Modulation Recognition of Radar Signals[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011.
- [15] 胡国兵, 徐立中, 金明. 基于 NP 准则的 LFM 信号盲处理结果可靠性检验[J]. 电子学报, 2013, 41(4): 739-743.
HU G B, XU L Z, JING M. Reliability testing for blind processing results of LFM signals based on NP criterion[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4): 739-743.
- [16] FEHSKE A, GAEDDERT J, REED J H. A new approach to signal classification using spectral correlation and neural networks[A]. 2005 First IEEE International Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks, DySPAN 2005[C]. 2005. 144-150.
- [17] WEI S, YU M. Dual-use of modulation recognition techniques for digital communication signals[A]. Systems, Applications and Technology Conference[C]. 2006. 1-6.
- [18] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume II: Detection Theory[M]. Prentice Hall PTR, 1993.
- [19] KENNETH C, DONALD H. Communication Circuits: Analysis and Design[M]. Addison-Wesley Publishing Company. 1978.
- [20] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. A Handbook of Mathematic Function with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables[M]. Washington I A U S Department of Commerce, 1965.

作者简介：



胡国兵 (1978-), 男, 江苏高淳人, 博士, 南京信息职业技术学院副教授, 主要研究方向为认知无线电、雷达信号处理。



徐立中 (1958-), 男, 山东东营人, 博士, 河海大学教授、博士生导师, 主要研究方向为多传感器系统与信息融合、遥感和遥测信号处理等。



鲍安平 (1974-), 男, 安徽芜湖人, 东南大学博士生, 南京信息职业技术学院副教授, 主要研究方向为智能电网。



吴珊珊 (1982-), 女, 江苏南通人, 南京信息职业技术学院讲师、工程师, 主要研究方向为通信与信息系统、认知无线电。



高燕 (1981-), 女, 江苏江都人, 南京信息职业技术学院讲师、工程师, 主要研究方向为数字图像处理技术、认知无线电。