doi:10.11959/j.issn.1000-436x.2015049

具有灵活子序列数目的零相关区周期互补序列集构造法

李玉博[1]，许成谦[1]，荆楠[1]，李刚[1]，刘凯[1]，胡皓晨[2]
（1. 燕山大学 信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004；2. 福建工程学院，福建 福州 350000）

摘 要：研究了零相关区周期互补序列集的构造方法。基于正交矩阵，构造了一类具有灵活子序列数目的零相关区周期互补序列集，序列集参数达到理论界限。在多载波码分多址通信系统中可以根据子载波的数目灵活设定序列集中子序列数目，因此构造的 ZCZ 周期互补序列集具有更大的应用价值。
关键词：多载波码分多址；周期互补序列；零相关区(ZCZ)；正交矩阵
中图分类号：TN911.2 **文献标识码**：A

Construction of ZCZ periodic complementary sequence set with flexible subsequences

LI Yu-bo[1], XU Cheng-qian[1], JING Nan[1], LI Gang[1], LIU Kai[1], HU Hao-chen[2]
(1. School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China; 2. Fujian University of Technology, Fuzhou 350000, China)

Abstract: Based on orthogonal matrices, a construction of zero-correlation zone (ZCZ) periodic complementary sequence sets are proposed. The resultant ZCZ periodic complementary sets have flexible number of subsequences. Moreover, the ZCZ periodic complementary sequence sets are optimal. ZCZ periodic complementary sequence sets with flexible subsequences are more useful in communication systems.
Key words: multi-carrier code division multiple access; periodic complementary sequences; zero correlation zone; orthogonal matrices

1 引言

互补序列具有理想自相关性能和互相关性能，理论上可以完全消除 CDMA 系统中的多址干扰和多径干扰。在应用中，互补序列的数目直接决定了用户的数目。为了扩展互补序列的数量，学者们提出了 ZCZ 非周期互补序列集[1]和 ZCZ 周期互补序列集[2]。根据 ZCZ 互补序列理论界限可知[1]，ZCZ 互补序列集中序列数目更多，应用到系统中可以支持更多的通信用户。目前，已有一些 ZCZ 非周期互补序列集构造方法提出[3~5]，然而 ZCZ 周期互补序列集构造方法较少。ZCZ 周期互补序列集在多载波 CDMA 通信系统[6]以及 MIMO 系统信道估计中都有着广泛应用。因此，研究 ZCZ 周期互补序列集具有理论意义和应用价值。

文献[7]构造了 GPZ 序列，属于 ZCZ 周期互补序列，然而子序列数目限制为 2。文献[8]通过对周期互补序列集进行简单的移位操作构造了 ZCZ 周期互补序列集。基于二元周期互补序列集，文献[9]分别利用交织和逆 Gray 映射构造了二元和四元 ZCZ 周期互补序列集，其零相关区长度可以灵活设定。文献[10]利用交织法构造了相关区长度可以灵活设定的 ZCZ 周期互补序列集。在多载波 CDMA 系统中，子序列的个数与实际系统中子载波的个数

收稿日期：2013-09-13；**修回日期**：2014-05-13
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61172094)；河北省自然科学基金资助项目(F2014203059)；河北省教育厅科研计划基金资助项目(QN2014027)；燕山大学青年教师自主研究计划基金资助项目(13LGB018)；燕山大学博士基金资助项目(B788)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61172094);The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2014203059);The Natural Science Research Programs of Hebei Educational Committee (QN2014027); The Independent Research Programs for Young Teachers of Yanshan University (13LGB018); The Ph.D. Foundation of Yanshan University (B788)

有关，因此具有灵活的子序列数目的 ZCZ 周期互补序列集具有更大的应用前景。目前，还没有关于可灵活设定子序列数目的 ZCZ 周期互补序列集构造方法提出。

本文方法基于正交矩阵，构造了一类子序列数目可以灵活设定的零相关区周期互补序列集，这是已有方法不能达到的。另外，同周期互补序列集相比，正交矩阵的存在数目具有很大的优势，因此利用本文方法可以得到更多的 ZCZ 周期互补序列集。

2　基本概念

定义 1　设 u_i,u_j 是 2 个长度为 L 的复数序列，序列 u_i 和 u_j 的周期互相关函数定义如下

$$R_{u_i,u_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{L-1}u_{i,t}u_{j,t+\tau}^{*} \tag{1}$$

其中，$0\leqslant\tau<L$，下标模 L 运算，$(\cdot)^{*}$ 表示取复共轭。当 $i=j$ 时，称为序列 u_i 的自相关函数，可以用 $R_{u_i}(\tau)$ 表示。

定义 2　设 $A=\{A^0,A^1,\cdots,A^{N-1}\}$ 是序列集，每个序列 $A^n=\{A_0^n,A_1^n,\cdots,A_{M-1}^n\}$ 包含 M 个子序列，子序列长度为 L，$A_m^n=(a_m^n(0),a_m^n(1),\cdots,a_m^n(L-1))$。如果序列相关函数满足

$$\boldsymbol{\Phi}_{A^{n_1},A^{n_2}}(\tau)=\sum_{m=0}^{M-1}R_{A_m^{n_1},A_m^{n_2}}(\tau)=\begin{cases}LM, & n_1=n_2,\tau=0\\ 0, & n_1=n_2,0<|\tau|<Z\\ 0, & n_1\neq n_2,|\tau|<Z\end{cases} \tag{2}$$

则称序列集 A 为零相关区(ZCZ)周期互补序列集，表示为 $(N,Z)PCS_M^L$。其中 N 表示序列集中 ZCZ 周期互补序列的数目，M 表示每个 ZCZ 周期互补序列包含的子序列数目，L 表示子序列长度，Z 表示零相关区长度。若 $Z=N$，则称序列集 A 为周期互补序列集，表示为 $PCS(N,M,L)$。

式(2)中用 $\boldsymbol{\Phi}_{A^{n_1},A^{n_2}}(\tau)$ 表示 2 个互补序列的互相关函数，如果 $n_1=n_2$，则用 $\boldsymbol{\Phi}_{A^{n_1}}(\tau)$ 表示互补序列的自相关函数。文中用 $R_{A_m^{n_1},A_m^{n_2}}(\tau)$ 表示 2 个子序列的周期互相关函数。

定义 3　由 ZCZ 周期互补序列集的理论界限可知，对于参数为 $(N,Z)PCS_M^L$ 的 ZCZ 周期互补序列集有 $N\leqslant M\lfloor L/Z\rfloor$。当等号成立时称序列集为参数达到理论界限的最佳 ZCZ 周期互补序列集。

3　ZCZ 周期互补序列集构造法

定理 1　取一个长度为 N_1 的完备序列 $a=(a(0),a(1),\cdots,a(N_1-1))$，一个 $T\times T$ 阶的正交矩阵 $\boldsymbol{H}=\left[h_{i,j}\right]_{T\times T}$。设定整数 K，令 $N_2=T/K$，设整数 $d=\gcd(N_1,N_2)$ 且 $\gcd\left(N_2/d,N_1\right)=1$，构造序列集 $C=\left\{C^{(0)},C^{(1)},\cdots,C^{(KN_2-1)}\right\}$，其中每个序列包含有 K 个子序列：$C^{(m)}=\left\{C_0^{(m)},C_1^{(m)},\cdots,C_{K-1}^{(m)}\right\}$，$0\leqslant m\leqslant KN_2-1$。每个子序列长度为 N_1N_2，由下面式子得到

$$C_k^{(m)}=\left(c_k^{(m)}(0),c_k^{(m)}(1),\cdots,c_k^{(m)}(N_1N_2-1)\right),$$
$$0\leqslant k\leqslant K-1 \tag{3}$$
$$c_k^{(m)}(t)=a\left((N_1t/d+\lfloor t/d\rfloor)\bmod N_1\right)h_{m,kN_2+(t\bmod N_2)} \tag{4}$$

若 $d=1$，则序列集 C 是一个零相关区周期互补序列集，参数为 $(KN_2,N_1)PCS_K^{N_1N_2}$。若 $d>1$，则序列集 C 是一个零相关区周期互补序列集，参数为 $(KN_2,N_1-1)PCS_K^{N_1N_2}$。

证明　设 $C^{(m_1)},C^{(m_2)}\in C$，计算互相关函数如下

$$\begin{aligned}R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)&=\sum_{k=0}^{K-1}R_{C_k^{(m_1)},C_k^{(m_2)}}(\tau)\\&=\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t=0}^{N_1N_2-1}c_k^{(m_1)}(t)c_k^{(m_2)}(t+\tau)\\&=\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t=0}^{N_1N_2-1}a\left(\left(\frac{N_1t}{d}+\left\lfloor\frac{t}{d}\right\rfloor\right)\bmod N_1\right)h_{m_1,kN_2+(t\bmod N_2)}\cdot\\&\quad a\left(\left(\frac{N_1(t+\tau)}{d}+\left\lfloor\frac{t+\tau}{d}\right\rfloor\right)\bmod N_1\right)h_{m_2,kN_2+((t+\tau)\bmod N_2)}\end{aligned} \tag{5}$$

令 $t=t_1N_2+t_2$，$0\leqslant t_1\leqslant N_1-1$，$0\leqslant t_2\leqslant N_2-1$；$\tau=\tau_1d+\tau_2$，$0\leqslant\tau_2\leqslant d-1$，则上式变换为

$$\begin{aligned}&R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=\\&\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t_1=0}^{N_1-1}\sum_{t_2=0}^{N_2-1}a\left(\left(\frac{t_2N_1}{d}+\left\lfloor\frac{t_1N_2+t_2}{d}\right\rfloor\right)\bmod N_1\right)\cdot\\&a\left(\left(\frac{N_1(t_2+\tau_2)}{d}+\tau_1+\left\lfloor\frac{t_1N_2+t_2+\tau_2}{d}\right\rfloor\right)\bmod N_1\right)\cdot\\&h_{m_1,kN_2+t_2}h_{m_2,kN_2+((t_2+\tau_1d+\tau_2)\bmod N_2)}\end{aligned}$$

令 $t_3=\dfrac{t_2N_1}{d}+\left\lfloor\dfrac{t_1N_2+t_2}{d}\right\rfloor=\dfrac{t_2N_1}{d}+\dfrac{t_1N_2}{d}+\left\lfloor\dfrac{t_2}{d}\right\rfloor$，

$t_4=\frac{N_1(t_2+\tau_2)}{d}+\tau_1+\frac{t_1N_2}{d}+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{d}\right\rfloor$。由 gcd $(N_2/d, N_1)=1$ 可知，当 $t_1=0,1,2,\cdots,N_1-1$ 时，t_3，t_4 取遍集合 $\{0,1,2,\cdots,N_1-1\}$ 中的值，则有

$$\begin{aligned}R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=&\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t_1=0}^{N_1-1}\sum_{t_2=0}^{N_2-1}a(t_3 \bmod N_1)a(t_4 \bmod N_1)\cdot\\&h_{m_1,kN_2+t_2}h_{m_2,kN_2+((t_2+\tau_1d+\tau_2)\bmod N_2)}\\=&R_a((t_4-t_3)\bmod N_1)\cdot\\&\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t_2=0}^{N_2-1}h_{m_1,kN_2+t_2}h_{m_2,kN_2+((t_2+\tau_1d+\tau_2)\bmod N_2)}\end{aligned}\tag{6}$$

由完备序列 a 的自相关性质可知，上式不为 0 当且仅当 $t_4-t_3=0(\bmod N_1)$ 成立，即

$$\frac{N_1\tau_2}{d}+\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{d}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{t_2}{d}\right\rfloor=0(\bmod N_1)\tag{7}$$

若 $d=1$，则有 $\tau=\tau_1+\tau_2$，$t_4-t_3=\tau$。此时式(7)成立当且仅当 $\tau=\tau_1+\tau_2=0(\bmod N_1)$。故当 $0<\tau\leqslant N_1-1$ 时，有 $R_a((t_4-t_3)\bmod N_1)=0$，此时有 $R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=0$。当 $\tau=0$ 且 $m_1\neq m_2$ 时，根据正交矩阵各行的正交性可得

$$\begin{aligned}R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(0)=&R_a(0)\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{t_2=0}^{N_2-1}h_{m_1,kN_2+t_2}h_{m_2,kN_2+t_2}\\=&R_a(0)R_{h_{m_1},h_{m_2}}(0)\\=&0\end{aligned}\tag{8}$$

综上可知，当 $0<\tau\leqslant N_1-1$ 或者 $\tau=0$ 且 $m_1\neq m_2$ 时，有 $R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=0$。定理成立。

若 $d>1$，当 $0\leqslant\tau_1\leqslant N_1/d-2$，$0\leqslant\tau_2\leqslant d-1$ 时，可知此时 $0<\tau\leqslant N_1-d-1$。有下面不等式成立

$$0<\frac{N_1\tau_2}{d}+\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{d}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{t_2}{d}\right\rfloor\leqslant\frac{N_1(d-1)}{d}+\frac{N_1}{d}-2+1=N_1-1\tag{9}$$

式(7)成立当且仅当 $\tau_1=\tau_2=0$，即 $\tau=0$。故当 $0<\tau\leqslant N_1-d-1$ 时，有 $R_a((t_4-t_3)\bmod N_1)=0$，此时得 $R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=0$。当 $\tau=0$ 且 $m_1\neq m_2$ 时同样有 $R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(0)=R_a(0)R_{h_{m_1},h_{m_2}}(0)=0$。当 $\tau_1=N_1/d-1$，$0\leqslant\tau_2\leqslant d-1$ 时，可知 $N_1-d\leqslant\tau\leqslant N_1-2$。有下面不等式成立

$$0<\frac{N_1\tau_2}{d}+\tau_1+\left\lfloor\frac{t_2+\tau_2}{d}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{t_2}{d}\right\rfloor\leqslant N_1-1\tag{10}$$

此时有 $R_a((t_4-t_3)\bmod N_1)=0$，故 $R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=0$。综上可知，当 $0<\tau\leqslant N_1-2$ 或 $\tau=0$ 且 $m_1\neq m_2$ 时，有 $R_{C^{(m_1)},C^{(m_2)}}(\tau)=0$，定理 1 成立。

例 1 由 8×8 阶的 Hadamard 矩阵和长度为 7 的三元完备序列 $a=(1,1,0,1,0,0,-1)$。设定子序列数目 $K=2$。由定理 1 可得参数为 $(8,7)PCS_2^{28}$ 的零相关区周期互补序列集 $C=\{C^{(0)},C^{(1)},\cdots,C^{(7)}\}$ 如下。

$C^{(0)}=$(110100-1110100-1110100-1110100-1;
110100-1110100-1110100-1110100-1)

$C^{(1)}=$(1-10-100-1-11010011-10-100-1-1101001;
1-10-100-1-11010011-10-100-1-1101001)

$C^{(2)}=$(110-1001-110-100-1-1-10100-11-101001;
110-1001-110-100-1-1-10100-11-101001)

$C^{(3)}=$(1-101001110-1001-110-100-1-1-10100-1;
1-101001110-1001-110-100-1-1-10100-1)

$C^{(4)}=$(110100-1110100-1110100-1110100-1;
-1-10-1001-1-10-1001-1-10-1001-1-10-1001)

$C^{(5)}=$(1-10-100-1-11010011-10-100-1-1101001;
-11010011-10-100-1-11010011-10-100-1)

$C^{(6)}=$(110-1001-110-100-1-1-10100-11-101001;
-1-10100-11-101001110-1001-110-100-1)

$C^{(7)}=$(1-101001110-1001-110-100-1-1-10100-1;
-110-100-1-1-10100-11-101001110-1001)

若设定子序列数目 $K=4$，可得参数为 $(8,7)PCS_4^{14}$ 的 ZCZ 周期互补序列集。由定义 3 可知，$(8,7)PCS_2^{28}$ 和 $(8,7)PCS_4^{14}$ 都是最佳 ZCZ 周期互补序列集。

4 序列集参数分析与比较

当 $d=1$ 时，对于本文所构造的 ZCZ 周期互补序列集 C 的参数为 $(KN_2,N_1)PCS_K^{N_1N_2}$。设 M_0 为序列集中序列数目理论上限，则有：$M_0=K\lfloor N_1N_2/N_1\rfloor=KN_2$。可知当 $d=1$ 时，序列集是一个最佳 ZCZ 周期互补序列集。当 $d>1$ 时，则序列集 C 参数为 $(KN_2,N_1-1)PCS_K^{N_1N_2}$，设 M_0 为序列集中序列数目理论上限，则有：$M_0=K\lfloor N_1N_2/(N_1-1)\rfloor=KN_2+\lfloor N_2/(N_1-1)\rfloor$。可知，若 $N_2<N_1-1$ 时，有 $M_0=KN_2$，此时序列集 C 是一个最佳 ZCZ 周期互补序列集。表 1 列出了几种 ZCZ 周期互补序列集方法的比较。

表 1　　**几类 ZCZ 周期互补序列集构造法比较**

构造方法	序列集参数	参数达到理论界限的条件	子序列数目可否灵活设定
文献[8]	$(NM',Z)PCS_M^L$	$M=N$	否
文献[9]定理 1	$(2NM',Z)PCS_M^{2L}$	$M=N$	否
文献[9]定理 2	$(NM',Z)PCS_M^L$	$M=N$	否
文献[10]	$(2NM',Z)PCS_M^{2L}$	$M=N$	否
本文定理 1 $\gcd(N_1,N_2)=1$ 时	$(KN_2,N_1)PCS_K^{N_1N_2}$	$\gcd(N_1,N_2)>1$	是
本文定理 1 $\gcd(N_1,N_2)>1$ 时	$(KN_2,N_1-1)PCS_K^{N_1N_2}$	$\gcd(N_1,N_2)>1$，　$N_2<N_1-1$	是

由表 1 可知，已有 ZCZ 周期互补序列集构造方法都是基于完全周期互补序列集作为初始序列，得到的 ZCZ 周期互补序列集中子序列数目等于初始周期互补序列集子序列数目，不能灵活设定，且只有当初始周期互补序列集参数达到理论界限时 ZCZ 周期互补序列集参数才能达到理论界限。本文方法基于正交矩阵，得到的 ZCZ 周期互补序列集子序列数目可以灵活设定，且序列集参数可以达到理论界限。同周期互补序列集相比，正交矩阵的存在数量具有很大优势，因此本文方法可以构造更多的 ZCZ 周期互补序列集。

5　结束语

给出一种 ZCZ 周期互补序列集的构造方法。利用正交矩阵和完备序列，得到了两类具有不同参数但子序列数目都可以灵活设定的 ZCZ 周期互补序列集。序列集参数具有较大的灵活性，在一些条件下可以达到理论界限。同已有方法相比，本文方法可以灵活设定 ZCZ 周期互补序列集的子序列数目，因此具有更大的应用前景。

参考文献：

[1] FAN P Z, YUAN W N, TU Y F. Z-complementary binary sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(8):509-512.

[2] YUAN W N, TU Y F, FAN P Z. Optimal training sequences for cyclic-prefix-based single-carrier multi-antenna systems with space-time block-coding[J]. IEEE Trans Wireless Communications, 2008, 7(11): 4047- 4050.

[3] ZHANG Z Y, CHEN W, ZENG F X, *et al*. Z-complementary sets based on sequences with periodic and aperiodic zero correlation zone[J]. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, 2009, 2009:1-9.

[4] 张振宇, 曾凡鑫, 宣贵新等. MC-CDMA 系统中具有组内互补特性的序列构造[J]. 通信学报, 2011, 32(3):28-32.
ZHANG Z Y, ZENG F X, XUAN G X, *et al*. Design of sequences with intra-group complementary properties for MC-CDMA systems[J]. Journal on Communications, 2011, 32(3):28-32.

[5] 李玉博, 许成谦. 迭代法构造零相关区互补序列集[J]. 通信学报, 2011, 32(8):38-44.
LI Y B, XU C Q. Zero correlation zone complementary sets based on iteration[J]. Journal on Communications, 2011, 32(8):38-44.

[6] CHEN H H, YEH J F, SEUHIRO. A multi-carrier CDMA architecture based on orthogonal complementary codes for new generations of wideband wireless communications[J]. IEEE Commun. Mag., 2001, 39(10):126-135.

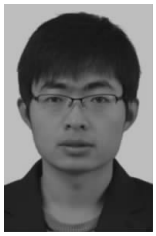
[7] FENG L F, FAN P Z, TANG X H. Generalized pairwise z-complementary codes[J]. IEEE Signal Process Lett, 2008, 15(3): 377-380.

[8] TU Y F, FAN P Z, HAO L, *et al*. A simple method for generating optimal z-periodic complementary sequence set based on phase shift[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 17(10):891-893.

[9] 李玉博, 许成谦, 李刚. 二元及四元零相关区周期互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(1):115-120.
LI Y B, XU C Q, LI G. Constructions of binary and quaternary periodic complementary sequence sets with zero correlation zone[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2012, 34(1): 115-120.

[10] FENG L F, ZHOU X W, FAN P Z. A construction of inter-group complementary codes with flexible ZCZ length[J]. Journal of Zhejiang University Science C, 2011, 12(10):846-854.

作者简介：



李玉博（1985-），男，河北衡水人，博士，燕山大学讲师，主要研究方向为序列设计。

许成谦[通信作者]（1961-），男，陕西城固人，博士，燕山大学教授、博士生导师，主要研究方向为编码理论、密码学、信号设计等。E-mail:cqxu@ysu.edu.cn。

荆楠（1978-），女，黑龙江哈尔滨人，博士，燕山大学副教授，主要研究方向为时变稀疏信号处理及其在 MIMO-OFDM 系统中的应用。

李刚（1979-），男，黑龙江通河人，博士，燕山大学副教授，主要研究方向为最佳离散信号设计、模式识别。

刘凯（1977-），女，辽宁沈阳人，博士，燕山大学副教授，主要研究方向为序列设计、扩频通信、编码理论。

胡皓晨（1991-），男，河北秦皇岛人，主要研究方向为编码理论。