

## 三元相关性量子行为粒子群优化算法研究

吴涛<sup>1</sup>, 陈曦<sup>2</sup>, 严余松<sup>3</sup>

(1. 成都信息工程学院 计算机学院, 四川 成都 610225; 2. 西南民族大学 计算机科学与技术学院, 四川 成都 610041;  
3. 西南交通大学 计算机科学与技术学院, 四川 成都 610031)

**摘要:** 为了提高 QPSO 算法的收敛性能, 在对随机因子进行分析的基础上提出了三元相关性 QPSO(TC-QPSO, ternary correlation QPSO)算法。该算法使用正态 Copula 函数建立了粒子对自身经验信息、群体共享信息以及粒子当前位置与群体平均最好位置的距离信息之间的内在认知和联系, 并利用 Cholesky 平方根公式给出了三元相关因子的生成方法。对测试函数的仿真结果证明, 当三元相关因子  $u$  与  $r_1$  或  $r_2$  之间存在负线性相关关系时, TC-QPSO 算法可以获得比标准 QPSO 算法更好的优化性能。

**关键词:** 粒子群优化; 量子粒子群优化; 量子势阱; 正态 Copula 函数; 收敛

中图分类号: TP391

文献标识码: A

## Study of the ternary correlation quantum-behaved PSO algorithm

WU Tao<sup>1</sup>, CHEN Xi<sup>2</sup>, YAN Yu-song<sup>3</sup>

(1. Department of Computer Science, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610225, China;  
2. School of Computer Science & Technology, Southwest University for Nationalities, Chengdu 610041, China;  
3. School of Computer Science & Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** In order to more effectively utilize existing information and improve QPSO's (quantum-behaved particle swarm optimization) convergence performance, the ternary correlation QPSO (TC-QPSO) algorithm was proposed based on the analysis of the random factors in location formula. The novel algorithm changed the information independent random processing method of standard QPSO and established internal relations during particles' own experience information, group sharing information and the distance from the particles' current location to the population mean best position using normal copula functions. Then, the method of generating ternary correlation factors was given by using the Cholesky square root formula. The simulation results of the test functions showed that TC-QPSO algorithm outperforms the standard QPSO algorithm in terms of optimization results, given that the negative linear correlation exists between  $u$  and  $r_1$  or  $u$  and  $r_2$ .

**Key words:** particle swarm optimization (PSO); quantum-behaved particle swarm optimization (QPSO); quantum potential well; normal copula function; convergence

### 1 引言

粒子群优化算法(PSO, particle swarm optimization)是 James Kennedy 和 Russell Eberhart 于 1995 年提出的一种进化计算方法<sup>[1]</sup>, 其概念简明、操作方法简便、参数少、收敛能力强等特点使之自问世

以来受到了广泛的关注, 并在函数优化问题、模式识别、机器人学习、数据挖掘、电力系统和无线传感器网络等诸多工程领域得到成功应用。但是, PSO 也存在着一些亟需解决的问题, 其中最主要的就是由 Bergh 所证明的不能保证以概率为 1 收敛于全局最优解<sup>[2]</sup>。针对该收敛瓶颈, 孙俊<sup>[3]</sup>提出了具有量

收稿日期: 2013-12-13; 修回日期: 2014-08-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61104175); 四川省软科学研究计划基金资助项目(2012ZR0022); 四川省科技支撑计划基金资助项目(2012GZX0090)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (61104175); Sichuan Province Soft Science Research Project(2012ZR0022); Sichuan Province Science Support Project(2012GZX0090)

子行为的粒子群优化算法(QPSO, quantum-behaved particle swarm optimization)。目前, QPSO 在多个应用领域及算法改进上得了广泛关注<sup>[4-6]</sup>。

通过对 QPSO 算法原理的研究可知, 在标准 QPSO 模型中, 粒子在求解空间中的位置时始终保持着自身经验、群体共享经验和粒子当前位置与群体平均最好位置的距离(以下简称为距离信息)3 种信息共同引导的搜索模式, 且 3 种信息都采用独立随机的加工方式。然而该信息加工方式是否有利于提高算法的优化性能, 如何更加合理地利用以上 3 种信息来确定粒子在求解空间中的位置却鲜有研究。针对该问题, 本文对 QPSO 粒子位置确定公式中的随机因子进行分析, 提出了三元相关因子的概念, 利用多元正态 Copula 函数建立三元相关因子的相关性用以分析粒子对自身经验信息、群体共享信息以及距离信息认知的内在联系, 在此基础上提出了三元相关性 QPSO(TC-QPSO, ternary correlation QPSO algorithm)算法, 并给出了使用 Cholesky 平方根公式生成三元相关因子的方法。对单峰和多峰标准测试函数的实验结果表明, 新算法通过选择适合的相关系数矩阵在求解大部分函数时可以获得比标准 QPSO 算法更好的优化结果。

## 2 量子粒子群优化算法

为了解决 PSO 算法不能保证以概率 1 收敛于全局最优解的问题, Sun<sup>[7]</sup>在分析了其他学者关于粒子收敛行为的研究成果后, 通过假设 PSO 系统是一个量子系统, 提出了一种新的基于量子  $\delta$  势阱模型的 PSO 算法, 称为量子行为粒子群优化算法, 即 QPSO 算法。QPSO 根据 Clerc 和 Kennedy<sup>[8]</sup>对 PSO 算法中粒子运行轨道的分析结果, 以局部吸引点  $p_i=(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})$  为中心建立了一个  $\delta$  势阱来对群体中的粒子产生影响, 其坐标为

$$P_{ij}(t) = \frac{c_1 r_{1j}(t) P_{ij}(t) + c_2 r_{2j}(t) G_j(t)}{c_1 r_{1j}(t) + c_2 r_{2j}(t)}, 1 \leq j \leq D \quad (1)$$

其中,  $P_{ij}$  和  $G_j$  分别表示  $D$  维搜索空间中粒子  $i$  的个体极值  $pbest$  和全局极值  $gbest$  的第  $j$  维分量,  $r_1$  和  $r_2$  为  $[0,1]$  之间独立分布的随机数, 称为随机因子;  $c_1$  为个体认知加速系数,  $c_2$  为群体认知加速系数。

QPSO 中粒子在每一代中的位置更新公式为

$$X_{ij}(t+1) = p_{ij}(t) \pm \frac{L_{ij}(t)}{2} \ln[1/u_{ij}(t)] \quad (2)$$

其中,  $u_{ij}(t) \sim U(0,1)$ ,  $L_{ij}(t)$  为势阱长度。 $L_{ij}(t)$  通过式(3)来评价。

$$L_{ij}(t) = 2\alpha |C_j(t) - X_{ij}(t)| \quad (3)$$

$C(t)$  为所有粒子个体最好位置的平均, 通过式(4)计算。

$$\begin{aligned} C(t) &= (C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i(t) \\ &= \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{i1}(t), \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{i2}(t), \dots, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_{iN}(t) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

因此, 式(4)的粒子位置进化公式最终改写为

$$X_{ij}(t+1) = p_{ij}(t) \pm \alpha |C_j(t) - X_{ij}(t)| \ln[1/u_{ij}(t)] \quad (5)$$

其中,  $\alpha$  称为收缩-扩张系数, 可以采用固定取值和线性减小的取值方式。

## 3 三元相关性 QPSO 模型

QPSO 算法以收敛点  $p_i$  为中心建立势阱模型, 根据粒子的个体经验、群体共享经验以及距离信息向着最优解的方向运动。通过式(1)和式(5)分析可知, 粒子在求解空间中的位置对  $pbest$  和  $gbest$  的利用程度依赖于加速系数  $c_1$ 、 $c_2$  和随机因子  $r_1$ 、 $r_2$ , 对距离信息的利用程度依赖于收缩扩张因子  $\alpha$  和随机因子  $u$ 。作为粒子群优化算法中的重要参数, 加速系数和收缩扩张因子都有很多相关的研究<sup>[1,3,8-10]</sup>, 这些改良策略在一定程度上提高了粒子群优化算法的性能, 但却忽略了随机因子  $r_1$ 、 $r_2$  和  $u$  对算法的影响, 而且 QPSO 粒子位置公式中对  $r_1$ 、 $r_2$  和  $u$  的独立性假设使算法无法对已有信息加以区分利用。目前对随机因子的研究很少<sup>[11]</sup>, 为了进一步研究粒子自身经验、群体经验和距离信息对 QPSO 算法性能的影响, 对随机因子进行分析研究是非常必要的。

为了分析 QPSO 模型中随机因子  $r_1$ 、 $r_2$  和  $u$  的相关性, 首先提出三元相关因子的概念。

**定义 1** 量子行为粒子群优化模型(QPSO)中具有相关特性的随机因子  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $u$  称为三元相关因子。

由于  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $u$  都是  $[0,1]$  区间内均匀分布的随机变量, 三元相关因子的概率特性可以通过计算在  $[0,1]$  区间内均匀分布的 3 个相关随机变量获得。通常

情况下，在处理 3 个及以上相关的随机变量时，多元正态 Copula 函数可以较好地拟合样本数据，因此本文使用多元正态 Copula 函数构建相关性量子粒子群优化模型。

定义 2<sup>[12,13]</sup>  $N$  元正态 Copula(MVNC, multivariate normal Copula)分布函数和密度函数的表达式分别为

$$C(v_1, v_2, \dots, v_N; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(v_1), \Phi^{-1}(v_2), \dots, \Phi^{-1}(v_N)) \quad (6)$$

$$c(v_1, v_2, \dots, v_N; \rho) = |\rho|^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2} \rho^{-1}(\rho^{-1} - I)\zeta) \quad (7)$$

$\rho$  为对角线上的元素为 1 的对称正定矩阵， $|\rho|$  表示与矩阵  $\rho$  相对应的行列式的值； $\Phi_\rho(\bullet, \dots, \bullet)$  示相关系数矩阵为  $\rho$  的标准多元正态分布函数， $\Phi^{-1}(\bullet)$  表示标准正态分布函数  $\Phi(\bullet)$  的逆函数； $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)'$ ，其中， $\zeta_n = \Phi^{-1}(v_n), n=1, 2, \dots, N$ ； $I$  为单位矩阵。

根据多元分布 Sklar 定理<sup>[14-16]</sup>，可以得到三元因子  $r1$ 、 $r2$  和  $u$  的相关性描述公式如下

$$H(r1, r2, u) = C(r1, r2, u; \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(r1), \Phi^{-1}(r2), \Phi^{-1}(u)) \quad (8)$$

其中， $H$  为三元相关因子  $r1$ 、 $r2$ 、 $u$  的联合分布函数， $C$  为三元正态 Copula 函数， $\rho$  为对角线上元素为 1 的指定相关系数矩阵，用于反映出三元相关因子  $r1$ 、 $r2$ 、 $u$  之间的相关特性。

因为相关系数矩阵  $\rho$  为正定矩阵，三元相关因子之间存在以下几种无法使用多元正态 Copula 函数描述的特殊关系。

1) 完全正线性相关，此时的三元相关因子的相关系数矩阵为全 1 矩阵；

2) 变量间完全相互独立，此时三元相关因子的相关系数矩阵为单位矩阵；

3) 3 个随机变量中若有 2 个变量之间存在相互独立、完全正线性相关、完全负线性相关的相关关系时，可做如下分析。

(a) 3 个随机变量  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  中存在 2 个相互独立的随机变量且 3 个随机变量之间不为完全相互独立关系，则必定有 2 对相互独立的随机变量。设  $X$ 、 $Y$  为相互独立的随机变量，则  $X$ 、 $Y$  之间的相关系数为 0，用  $\rho_{12}=0$  表示， $Y$ 、 $Z$  之间的相关系数用  $\rho_{23}$  表示，其中  $-1 \leq \rho_{23} \leq 1$ ，且  $\rho_{23} \neq 0$ ，此时必有  $X$ 、 $Z$  相互独立，即  $\rho_{13}=0$ 。

(b) 3 个随机变量  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  中有 2 个变量之间为完全正线性相关且 3 个随机变量之间不为完全正线性相关关系。设  $X$ 、 $Y$  为完全正线性相关，则相关系数  $\rho_{12}=1$ ， $Y$ 、 $Z$  和  $X$ 、 $Z$  的相关系数分别为  $\rho_{23}$  和  $\rho_{13}$ ， $-1 \leq \rho_{23}$ ， $\rho_{13} < 1$ ，相关系数矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \rho_{13} \\ 1 & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

系数矩阵对应的行列式为

$$|\rho| = (1 + 2\rho_{13}\rho_{23}) - (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + 1) = -(\rho_{13} - \rho_{23})^2 \geq 0$$

此时有  $\rho_{13} = \rho_{23}$ ；

(c) 3 个随机变量  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  中有 2 个变量之间为完全负线性相关。设  $X$ 、 $Y$  完全负线性相关，则相关系数为  $\rho_{12}=-1$ ， $Y$ 、 $Z$  和  $X$ 、 $Z$  的相关系数分别为  $\rho_{23}$  和  $\rho_{13}$ ， $-1 \leq \rho_{23}$ ， $\rho_{13} < 1$ ，相关系数矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \rho_{13} \\ -1 & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

系数矩阵对应的行列式为

$$|\rho| = (1 - 2\rho_{13}\rho_{23}) - (\rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 + 1) = -(\rho_{13} + \rho_{23})^2 \geq 0$$

此时有  $\rho_{13} = -\rho_{23}$ 。

实际上，当  $N=3$  时，Fréchet 上界  $C^+ = \min(r1, r2, u)$  和乘积 Copula:  $C^\perp = r1r2u$  仍然是 Copula 函数，如果将  $C^+$  和  $C^\perp$  视为 3 个随机变量  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  的联合分布函数，则对应的相关关系为完全正线性相关和相互独立。为了完整的描述三元相关因子之间的相关关系，使用三元 Copula 函数联合三元 Fréchet 上界  $C^+$  和三元乘积 Copula:  $C^\perp$  一起来描述变量之间的相关关系。

$$C_\rho(r1, r2, u) = \begin{cases} C^\perp(r1, r2, u), \rho_{ij} = 0, \\ C^+(r1, r2, u), \rho_{ij} = 1, \\ \Phi_\rho(\Phi^{-1}(r1), \Phi^{-1}(r2), \Phi^{-1}(u)), -1 < \rho_{ij} < 1, \rho_{ij} \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

严格来说， $N>2$  时的 Fréchet 下界  $C^-$  并不是一个 Copula 函数。因此在处理第三种情况时，可将三元相关关系降为二元相关关系，通过二元 Fréchet 上界:  $M(x,y) = \min(x,y)$ ，二元 Fréchet 下

界:  $W(x,y)=\max(x+y-1,0)$ 以及二元乘积 Copula 函数:  $\Pi(x,y)=xy$ 联合二元正态 copula 函数进行描述。

$$C_{\rho}(r1,r2,u)=\begin{cases} W(x,y),\rho_{ij}=-1, \\ \Pi(x,y),\rho_{ij}=0, \\ M(x,y),\rho_{ij}=1, \\ \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(x),\Phi^{-1}(y)), -1<\rho_{ij}<1,\rho_{ij}\neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $x,y\in[r1,r2,u]$ ,  $x\neq y$ ,且  $ij\in[1,2,3]$ 。因此, TC-QPSO 算法模型中  $r1,r2,u$  的相关特性可由式(9)和式(10)共同描述。在此基础上,可以得出三元相关性 QPSO 算法的定义。

**定义 3** 由式(1)、式(5)、式(9)、式(10)所描述的粒子在  $\delta$  势阱中运动规律的算法模型称为三元相关性 QPSO 模型,简称 TC-QPSO。TC-QPSO 算法模型中,粒子位置的更新如式(11)所示。

$$\begin{cases} X_{ij}(t+1)=p_{ij}(t)\pm\alpha\left|\frac{C_j(t)-X_{ij}(t)}{X_{ij}(t)}\right|\ln\left[1/u_{ij}(t)\right], 1\leq j\leq D \\ P_{ij}(t)=\frac{c_1r1_{ij}(t)P_{ij}(t)+c_2r2_{ij}(t)G_j(t)}{c_1r1_{ij}(t)+c_2r2_{ij}(t)}, 1\leq j\leq D \\ H(r1,r2,u)=C(r1,r2,u;\rho) \end{cases} \quad (11)$$

**定义 4** 当  $\rho_{ij}=1,i,j=1,2,3$  时,三元相关因子变化趋势一致,变量之间为完全正线性相关关系,此时将 TC-QPSO 算法称为三元正线性相关 QPSO(PTC-QPSO positive ternary correlation QPSO algorithm)。

**定理** TC-QPSO 模型是 QPSO 模型的扩展。 $i\neq j$  时,  $\rho_{ij}=0$ ,  $i=j$  时,  $\rho_{ij}=1$ , 此时三元相关因子  $r1$ 、 $r2$  和  $u$  相互独立, TC-QPSO 模型退化为 QPSO 模型。

在 TC-QPSO 模型中,  $r1$ ,  $r2$  间的相关程度体现了粒子对自身经验  $pbest$  和共享信念  $gbest$  持有度之间的关系;  $r1$ ,  $u$  间的相关程度体现了粒子对自身经验  $pbest$  和距离信息之间的关系; 而  $r2$ ,  $u$  间的相关程度则体现了粒子对群体共享信念  $gbest$  和距离信息之间的关系。

## 4 算法实现

### 4.1 三元相关因子的生成

本文提出的 TC-QPSO 算法的实现难点在于如何利用给定的 Copula 函数生成三元相关因子  $r1,r2,u$ 。最直接的方法就是根据 Copula 函数的定义,

通过计算 Copula 函数的偏导以及偏导的拟逆来获得。但由于计算的复杂性,该计算通常仅能通过数值方法来实现。本文使用 Cholesky 平方根公式,根据多元随机变量的生成方法生成三元相关因子  $r1,r2,u$ 。

对于多元相关正态随机变量来说使用 Cholesky 平方根公式来获得所需的方差-协方差矩阵是非常复杂的,本文使用矩阵的方法来进行构造。通常包含多个正态分布随机变量的向量可以用  $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_M)$  表示,其中每个元素  $Y_i(i=1,2,\dots,M)$  都服从  $N(\mu_i,\sigma_i^2)$  的正态分布,  $Y_i$  与  $Y_j$  的协方差为  $\sigma_{ij}$ ,  $Y_i$  与  $Y_j$  的相关性用  $\rho_{ij}$  表示,  $\rho_{ij}=\sigma_{ij}/\sigma_i\sigma_j$ , 因此  $Y$  的均值向量可以用  $m=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$  表示,其协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \dots & \sigma_M^2 \end{bmatrix}$$

在已知方差-协方差矩阵的情况下,可以通过如下方法获得包含多个正态分布随机变量的向量  $Y=(Y_1, Y_2, \dots, Y_M)$ 。假设  $Z_i(i=1,2,\dots,M)$  是相互独立满足标准正态分布  $N(0,1)$  的随机变量,则向量  $Z=(Z_1,Z_2,\dots,Z_M)^T$  的均值向量为  $\mathbf{0}=(0,0,\dots,0)^T$  且  $Z_i$  与  $Z_j$  的协方差为 0,因此  $Z$  的方差-协方差矩阵为单位矩阵。已知协方差矩阵  $\Sigma$  为  $M\times M$  的对称矩阵,构造一个  $M\times M$  的上三角矩阵  $T$  使  $T^T T=\Sigma$ , 其中  $\Sigma$  必须为正定向量。那么进行  $Y=\mu_i+T^T Z$  运算就可以产生一个所需的满足多元正态分布的随机向量  $Y$ 。因为每个  $Y$  都是正态变量的线性组合,因此  $Y$  也是正态分布的。相反,如果所拥有的是一个相关矩阵  $R$ , 方差-协方差矩阵  $\Sigma$  则可以通过  $R$  和对角矩阵  $D$  得到,其中对角矩阵  $D$  中的元素是每个变量的方差,通过  $R$  前乘和后乘  $D$  就可以获得方差-协方差矩阵  $\Sigma$ 。

根据以上方法,在已知  $r1$  和  $r2$  之间的相关系数  $\rho_{12}$ ,  $r1$  和  $u$  之间的相关系数  $\rho_{13}$ ,  $r2$  和  $u$  之间的相关系数  $\rho_{23}$  的情况下,三元相关因子  $r1$ 、 $r2$  和  $u$  的生成过程如下。

- 1) 产生 3 个在  $[0,1]$  区间上均匀分布的相互独立的随机变量  $v_1, v_2, v_3$ ;
- 2) 令  $Z=(z_1,z_2,z_3)^T, Z'=(z_1',z_2',z_3')^T$ 。其中  $z_1=\Phi(v_1)$ ,  $z_2=\Phi(v_2), z_3=\Phi(v_3), z_1'=\Phi^{-1}(v_1), z_2'=\Phi^{-1}(v_2), z_3'=\Phi^{-1}(v_3)$ ,

$\Phi(\bullet)$ 为服从标准正态分布的分布函数。可知的  $Z$  均值向量为  $\mathbf{0}(0,0,0)$ 且  $Z_i$  与  $Z_i$  的协方差为 0, 因此  $Z$  的方差-协方差矩阵为单位矩阵。

3) 由于  $r_1, r_2$  和  $u$  都是服从  $N(0,1)$ 标准正态分布的随机变量, 则  $r_1, r_2$  和  $u$  的标准方差矩阵  $D$  为

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三元相关因子的相关矩阵  $\rho$  如下

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix}$$

则方差-协方差矩阵  $\Sigma$  可以通过  $\rho$  前乘和后乘对角矩阵  $D$  来获得。

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

构造上三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

使

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \Sigma$$

令  $Y=A^T Z$  可以得到 3 个相关的服从正态分布的随机向量  $Y$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}$$

由于每个  $Y_i$  都是正态变量的线性组合, 因此  $Y_i$  也是正态分布的。

4) 计算  $r_1=\Phi(Y_1)$ 、 $r_2=\Phi(Y_2)$ 和  $u=\Phi(Y_3)$ ,  $r_1$ 、 $r_2$  和  $u$  即为具有三元正态 Copula 函数  $C(r_1,r_2,u;\rho)$  的 3 个随机数。其中  $\rho$  为对角线上的元素为 1 的对称正定矩阵。

## 4.2 算法执行流程

根据以上对算法的设计和定义, 下面给出基于 TC-QPSO 算法的执行过程如下。

**step1** 设置参数。包括加速系数  $c_1, c_2$ , 收缩-扩张因子  $\alpha$ , 种群规模  $N$ 、求解空间维度  $D$ , 最大允许迭代次数  $iterMax$  或者是适应度的误差精度。

**step2** 种群初始化。在求解空间中随机产生粒子当前  $X_i(0)$ , 并初始化个体最好位置  $P_i(0)=X_i(0)$ 。

**step3** 在  $[0,1]$ 区间上生成 3 个相互独立的均匀分布的随机变量  $v_1, v_2, v_3$ , 给定相关系数矩阵  $\rho$ , 根据 4.1 节的方法生成三元相关因子  $r_1, r_2$  和  $u$ 。

**step4** 根据式(4)计算粒子群的平均最好位置。对于粒子群中的每一个粒子  $i(1 \leq i \leq N)$ , 执行 step4~step7。

**step5** 计算粒子  $i$  的当前位置  $X_i(t)$ 所对应的适应值, 更新粒子的个体最好位置, 如果  $f[X_i(t)] < f[P_i(t-1)]$ , 则执行  $P_i(t)=X_i(t)$ 操作; 否则, 执行  $P_i(t)=P_i(t-1)$ 操作。

**step6** 更新全局最好位置。如果  $f[P_g(t)] < f[P_g(t-1)]$ , 则执行  $P_g(t)=P_i(t)$ 的操作; 否则执行  $P_g(t)=P_g(t-1)$ 。

**step7** 对计算粒子  $i$  的每一维分量, 根据式(1)计算得到势阱中心点。

**step8** 根据式(11)更新粒子的位置。

**step9** 判断算法终止条件, 如果不满足, 则  $t=t+1$ , 重复 step 4~step 9; 否则算法结束。

## 5 实验设计与结果分析

### 5.1 实验设计与测试函数

由于许多实践工程中包括单峰和多峰的问题, 因此, 本文选用单峰函数: Sphere 函数、Rosenbrock 函数和多峰函数: Rastrigin 函数、Griewank 函数、Ackley 函数、Expanded Shaffer 函数 6 个标准测试函数来比较三元相关因子选用不同相关关系时 TC-QPSO 算法的优化性能。表 1 和表 2 给出了各测试函数的。实验中 6 个测试函数的问题维度都采用 20 维, 种群的规模设置为 50, 对应最大迭代步数设置为 1 000, 每个模型的测试独立运行 10 次, 考察 10 次实验迭代结束时测试函数的均值。

### 5.2 优化性能比较

三元相关因子之间采用以下几种相关关系。

1) 完全正线性相关(PTC-QDPSO)。

表 1 单峰函数

| 名称         | 表达式   | 搜索范围           | 初始化范围         | 最优解和最优值                |
|------------|---|----------------|---------------|------------------------|
| Sphere     | $f_1(X) = \sum_{i=1}^D x_i^2$                     | $[-100,100]^D$ | $[-100,50]^D$ | $f_1(0,0,\dots,0) = 0$ |
| Rosenbrock | $f_2(X) = [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]$ | $[-10,10]^D$   | $[-10,10]^D$  | $f_2(1,1,\dots,1) = 0$ |

表 2 多峰函数

| 名称               | 表达式   | 搜索范围                 | 初始化范围            | 最优解和最优值                |
|------------------|---|----------------------|------------------|------------------------|
| Rastrigin        | $f_3(X) = \sum_{i=1}^D (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10)$  | $[-5.12,5.12]^D$     | $[-5.12,2]^D$    | $f_3(0,0,\dots,0) = 0$ |
| Griewank         | $f_4(X) = \sum_{i=1}^D \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^D \cos(\frac{x_i}{\sqrt{i}}) + 1$   | $[-600,600]^D$       | $[-600,200]^D$   | $f_4(0,0,\dots,0) = 0$ |
| Ackley           | $f_5(X) = -20 \exp(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2}) - \exp(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i)) + 20 + e$  | $[-32.786,32.786]^D$ | $[-32.786,16]^D$ | $f_5(0,0,\dots,0) = 0$ |
| Expanded Shaffer | $f_6(X) = g(x_1, x_2) + g(x_2, x_3) + \dots + g(x_{D-1}, x_D) + g(x_D, x_1)$<br>$g(x, y) = 0.5 + \frac{(\sin \sqrt{x^2 + y^2})^2 - 0.5}{(1.0 + 0.001(\sqrt{x^2 + y^2}))^2}$ | $[-100,100]^D$       | $[-100,50]^D$    | $f_6(0,0,\dots,0) = 0$ |

2) 相互独立(此时 TC-QPSO 算法退化为 QPSO)。

3)  $r1, r2$  完全正线性相关, 和  $r1, u$  完全负线性相关,  $r2, u$  完全负线性相关(TC-QDPSO1)。

4)  $r1, r2$  完全负线性相关,  $r1, u$  完全正线性相关,  $r2, u$  完全负线性相关(TC-QPSO2)。

5)  $r1, r2$  完全负线性相关,  $r1, u$  完全负线性相关,  $r1, u$  完全正线性相关(TC-QPSO3)。

表 3 给出了三元相关因子的相关关系分别为上述 5 种情况时各 TC-QPSO 算法的优化结果。

通过表 3 和图 1 可知, 本章提出的 TC-QPSO 算法通过选择适合的相关系数矩阵  $\rho$ , 在处理大部分函数时可以获得比传统 QPSO 算法更好的优化性能, 不论在求解精度还是在求解速度上都表现出了较好的效果, 提高了找到被寻优函数最优解的可能性。在求解 Sphere 函数时, TC-QPSO1 和 TC-QPSO3

找到了最优解 0 而 TC-QPSO2 在处理 Rosenbrock 函数时具优势; 对于多峰函数 Rastrigin 来说, TC-QPSO1 获得了最好的优化结果; 非线性的强烈多峰函数 Griewank 在使用 TC-QPSO2 和 TC-QPSO3 进行寻优时找到了最优值; Ackley 函数是一个非线性的多峰函数, 在使用 TC-QPSO1 时获得了与 QPSO 同样的优化结果, 而 Expanded Shaffer 函数使用 TC-QPSO1 优化找到了最优解。

总体来说, 当随机因子  $u$  与  $r1$  或  $r2$  之间存在负线性相关关系时, 对单峰和多峰的测试函数在求解精度和收敛速度上都表现出了较好的结果。由 TC-QPSO 算法粒子位置确定公式可知, 粒子在局部寻优过程中对  $pbest$  和  $gbest$  的均衡利用程度随着  $r1, r$  之间相关系数的增大而增大, 对  $pbest$  和当前位置与平局最好位置的距离

表 3 TC-QPSO 算法对测试函数的优化结果

| 模型       | $f_1$                   | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$                  | $f_6$                 |
|----------|-------------------------|-------|-------|-------|------------------------|-----------------------|
| PTC-QPSO | $2.87 \times 10^{-206}$ | 17.01 | 19.48 | 0.48  | $1.48 \times 10^{-13}$ | $6.51 \times 10^{-8}$ |
| QPSO     | $4.24 \times 10^{-302}$ | 16.55 | 23.41 | 0.40  | $2.66 \times 10^{-15}$ | $1.91 \times 10^{-9}$ |
| TC-QPSO1 | 0                       | 16.54 | 12.80 | 1.56  | $2.66 \times 10^{-15}$ | 0                     |
| TC-QPSO2 | $3.81 \times 10^{-205}$ | 13.99 | 15.01 | 0     | $6.22 \times 10^{-15}$ | $4.52 \times 10^{-7}$ |
| TC-QPSO3 | 0                       | 14.69 | 11.95 | 0     | $1.33 \times 10^{-14}$ | $2.78 \times 10^{-8}$ |

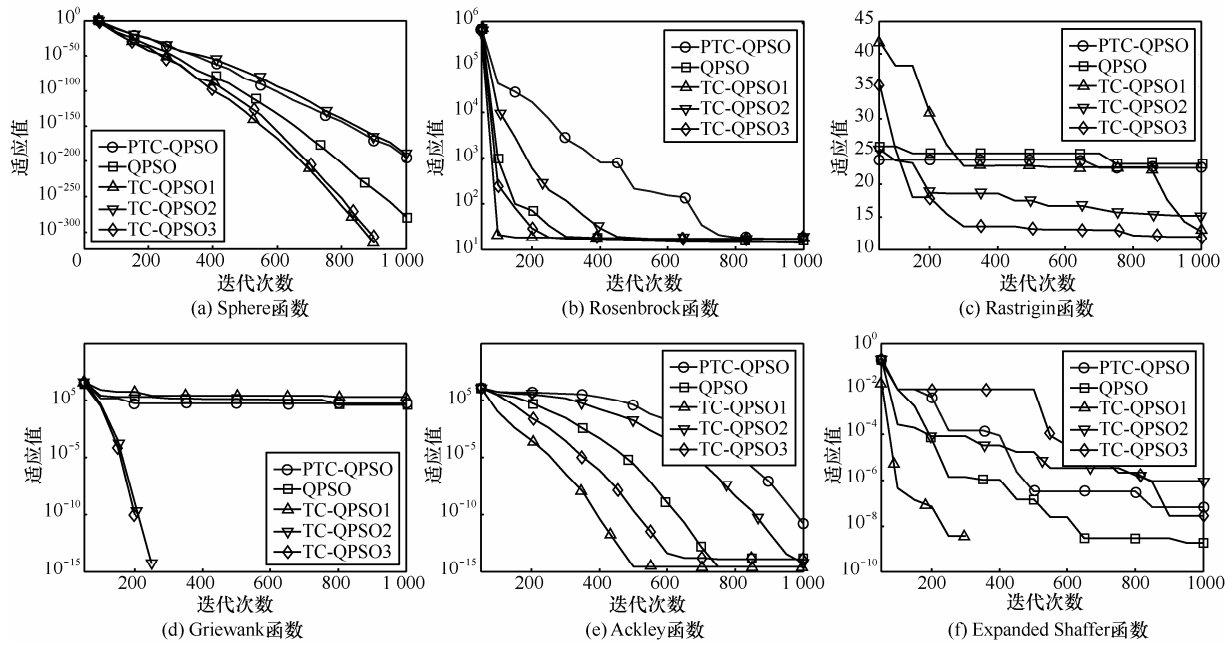


图 1 TC-QPSO 算法的收敛曲线

$|C_j(t)-X_{i,j}(t)|$ 的均衡利用程度随着  $r1, u$  之间相关系数的增大而减小,对  $gbest$  和  $|C_j(t)-X_{i,j}(t)|$ 的均衡利用程度随着  $r2, u$  之间相关系数的增大而减小。当  $r1, u$  之间为完全负线性相关关系时,粒子在增强对自身经验信息利用程度的同时也增强了粒子间的等待效应,同样的,当  $r2, u$  之间为完全负线性相关关系时,粒子在增强对群体共享经验利用程度的同时也会增强粒子间的等待效应。由于增强了粒子间的等待效应,制约了粒子过快的聚集在势阱中心附近,因此可以提高算法群体协同工作的能力,防止陷入局部最优,使算法的全局收敛性更强,获得更好的收敛结果。

### 6 结束语

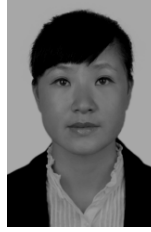
本文提出了三元相关性 QPSO 算法(TC-QPSO)。该算法通过使用多元 Copula 函数描述三元随机因子  $r1,r2,u$  间的相关关系,来表示粒子确定下一时刻在求解空间中的位置时对自身经验信息  $pbest$ 、群体共享信息  $gbest$  以及距离信息持有态度的关联性。通过 Cholesky 平方根公式,给出了利用  $[0,1]$ 区间内均匀分布的随机变量生成三元相关因子  $r1,r2,u$  的方法。6 个测试函数的实验结果表明,当随机因子  $u$  与  $r1$  或  $r2$  之间存在负线性相关关系时,TC-QPSO 算法在收敛精度和收敛速度上优于传统 QPSO 算法的优化性能。

### 参考文献:

- [1] KENNEDY J, EBERHART R. Particle swarm optimization[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks[C]. Perth, 1995.1942-1948.
- [2] BERGH F V D. An Analysis of Particle Swarm Optimizers [D]. South Africa: University of Pretoria,2002.
- [3] 孙俊, 方伟, 吴小俊等. 量子行为粒子群优化: 原理及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.  
SUN J, FANG W, WU X J, *et al.* Quantum-behaved Particle Swarm Optimization Principle and its Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011.
- [4] MIKKI S, KISHK A. Investigation of the quantum particle swarm optimization technique for electromagnetic applications[A]. IEEE International Symposium on Antennas and Propagation Society[C]. 2005.45-48.
- [5] MIKKI S, KISHK A, Quantum particle swarm optimization for electromagnetics [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(10): 2764-2775.
- [6] 李盼池, 王海英, 宋考平等.量子势阱粒子群优化算法的改进研究[J]. 物理学报, 2012,61(06): 19-28.  
LI P C, WANG H Y, SONG K P, *et al.* Research on the improvement of quantum potential well-based particle swarm optimization algorithm[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(06): 19-28.
- [7] 孙俊. 量子行为粒子群优化算法[D].江苏: 江南大学,2009.  
SUN J. Particle Swarm Optimization With Particles Having Quantum Behavior[D]. Jiangsu: Jiangnan University,2009.

- [8] CLERC M, KENNEDY J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.
- [9] 郭文忠, 陈国龙. 离散粒子群优化算法及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.  
GUO W Z, CHEN G L. Discrete Particle Swarm Optimization Algorithm and its Application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012.
- [10] ARUMUGAM M S, RAO M V C, TAN A W C. A novel and effective particle swarm optimization like algorithm with extrapolation technique[J]. Applied Soft Computing, 2009, 9(1): 308-320.
- [11] 申元霞. 相关性粒子群优化模型及其应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2010.  
SHEN Y X. Research on Correlative Particle Swarm Optimization Model and its Application[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2010.
- [12] 韦艳华, 张世英. Copula 理论及其在金融分析上的应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.  
WEI Y H, ZHANG S Y. Copula Theory and Its Applications in Financial Analysis [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.
- [13] CHERUBINI U, LUCIANO E, VECCHIATO W. Copula Methods in Finance[M]. England: John Wiley&Sons Ltd, 2004.
- [14] SKLAR A. Fonctions de Répartition à N Dimensions et Leurs Marges[D]. Paris: Université Paris, 1959.
- [15] SKLAR A. Random variables, distribution functions, and copulas: A personal look backward and forward[J]. Lecture Notes-Monograph Series, 1996, 28: 1-14.
- [16] NELSEN R B. An Introduction to Copulas[M]. New York: Springer, 2006.

#### 作者简介:



吴涛(1984-), 女, 山东曲阜人, 博士, 成都信息工程学院讲师, 主要研究方向为进化算法、群体智能算法。

陈曦(1984-), 男, 重庆人, 博士, 西南民族大学讲师, 主要研究方向为计算机网络、Web 服务。

严余松(1963-), 男, 四川简阳人, 西南交通大学教授、博士生导师, 主要研究方向为交通信息网络、交通系统仿真和物流信息技术。