

基于特征值极限分布的合作频谱感知算法

弥寅, 卢光跃

(西安邮电大学 无线网络安全技术国家工程实验室, 陕西 西安 710121)

摘要: 采用最新的随机矩阵理论, 对多个认知用户接收信号采样协方差矩阵的最小特征值的极限分布进行了分析, 提出了一种改进的最大最小特征值合作感知和门限判决方法。该算法不需预知授权用户信号的先验知识, 且能有效克服噪声不确定度的影响。与现有算法相比, 在给定虚警概率时, 仿真结果显示该算法判决门限更低、检测概率更高; 而且在认知用户和采样数较少时, 也能获得很好的检测性能。

关键词: 认知无线电; 频谱感知; 随机矩阵理论; 采样协方差矩阵; 特征值极限分布

中图分类号: TN92

文献标识码: A

Cooperative spectrum sensing algorithm based on limiting eigenvalue distribution

MI Yin, LU Guang-yue

(National Engineering Laboratory for Wireless Security, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China)

Abstract: A novel maximum-minimum eigenvalue (NMME) cooperative spectrum sensing algorithm and threshold decision rule are proposed via analyzing minimum eigenvalue limiting distribution of the covariance matrix of the received signals from multiple cognitive users (CU) by means of latest random matrix theory (RMT). The proposed scheme could not need the prior knowledge of the signal transmitted from primary user (PU) and could effectively overcome the noise uncertainty. At a given probability of false alarm (P_{fa}), simulation results show that the proposed scheme can get lower decision threshold and higher probability of detection (P_d) compared with the original algorithm, and it can also get better detection performance with fewer CU and smaller sample numbers.

Key words: cognitive radio; spectrum sensing; random matrix theory; sample covariance matrix; limiting eigenvalue distribution

1 引言

随着无线通信技术的快速发展, 无线频谱资源日益紧张, 下一代无线通信技术急需解决的问题就变成了怎样提高频谱的使用效率, 从而进一步提高通信系统的容量和服务质量。认知无线电(CR, cognitive radio)^[1]作为一种频谱再用技术, 已受到普遍关注。CR 通过对授权频段进行不间断的检测, 当该频段空闲, 即 PU 不通信时, CU 便可以伺机动

态接入该频段进行正常通信; 而当该频段被占用, 即 PU 通信时, 为了避免对 PU 的干扰, CU 必须及时退出该频段, 从而保证 PU 正常通信。

CR 应具备 3 种基本能力: 频谱感知(SS, spectrum sensing)、决策和自适应, 其中, 频谱感知是 CR 的首要特征和核心技术。经典的感知技术^[2]有能量检测(ED, energy detection)^[3]、匹配滤波器检测以及循环平稳特征检测^[4]等。其中最常用的 ED 算法实现简单, 不需预知 PU 发射机信号的任何先验知识, 但对噪声

收稿日期: 2013-09-04; 修回日期: 2014-04-10

基金项目: 国家科技重大专项基金资助项目(2012ZX03001025-004); 国家自然科学基金资助项目(61271276, 61301091); 陕西省自然科学基金资助项目(2012JQ8011, 2010JQ80241, 2014JM8299); 陕西省教育厅专项科研计划基金资助项目(14JK1681)

Foundation Items: The National Science and Technology Major Projects (2012ZX03001025-004); The National Natural Science Foundation of China (61271276,61301091); The Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2012JQ8011,2010JQ80241, 2014JM8299); The Research Program of Education Bureau of Shaanxi Province (14JK1681)

不确定度敏感，门限不易确定。匹配滤波器检测在加性高斯白噪声(AWGN)时性能最为优越，但需要同步，且需预知 PU 发射机信号的先验知识。循环平稳特征检测的优点是抗噪性强，但实现起来较为复杂，由于检测时间较长，从而降低了系统的灵敏度。

在认知网络中，多径衰落和阴影衰落经常造成认知节点的信噪比(SNR, signal to noise ratio)降低，而多节点合作感知^[5,6]能够在低信噪比时提高频谱检测的性能。近年来，对多节点合作感知的相关研究引起了很多人的关注。文献[7]对 Wishart 随机矩阵特征值的极限分布进行了详尽的分析，基于大维 RMT 理论，Cardoso L S 提出了 LSC 合作频谱感知算法，用特征值之比作为检验统计量^[8]，判决门限使用最大最小特征值的极限值直接做近似，由此得到的算法检测性能相比 ED 算法有所提高，但在采样数较小的实际应用情形下性能不够理想。由此，Zeng 等人提出了最大最小特征值(MME, maximum-minimum eigenvalue)算法^[9]，检验统计量与 LSC 算法一致，该算法研究并分析了最大特征值的极限分布，结合最小特征值的渐近值，从而推导出给定虚警概率条件下的判决门限，其检测性能得到明显改善，它充分考虑了实际中采样数较小的问题，这属于半渐近的理论，其性能优于渐近算法^[10]。

本文采用近年来 RMT 的最新研究成果，利用 Wishart 矩阵特征值的特性^[11]，在 MME 算法的基础上对接收信号采样协方差矩阵最小特征值的极限分布进行了分析，发现相较于最大特征值的极限分布函数，用最小特征值的极限分布进行门限确定时更加精确。在确定判决门限时，使用最大特征值的渐近值近似代替其本身，从而提出了一种 NMME 合作频谱感知算法及新的门限确定方法，该算法在 CU 数目和采样数较少时，感知性能较好。仿真实验对门限值曲线随虚警概率的变化进行了分析，并对 NMME 算法的检测性能与 MME 算法、ED 算法进行了比较，还对各算法的实际虚警率随信噪比的变化曲线进行了分析。结果显示，在低信噪比、满足给定虚警率要求时，NMME 算法具有很高的检测概率，且不需预知 PU 发射机信号的先验知识和噪声方差，能很好地抵抗噪声不确定度的影响。

2 系统模型和 MME 算法

2.1 系统模型

假设认知网络中 CU 数目为 M ，每个 CU 的采

样数为 N ，CU 采用合作方式对 PU 发射机信号进行频谱检测。这里用 H_0 表示频谱空闲，PU 不存在； H_1 表示频谱被占用，PU 存在，从而频谱感知即为二元假设检验问题^[1]

$$\mathbf{x}_i(n) = \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_i(n), & H_0 \\ \mathbf{s}_i(n) + \boldsymbol{\eta}_i(n), & H_1 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中， $\mathbf{x}_i(n)$ 为第 i 个 CU 在第 n 个时刻采样到的信号向量； $\mathbf{s}_i(n)$ 为第 i 个 CU 接收到的 PU 发射机信号向量； $\boldsymbol{\eta}_i(n)$ 为加性高斯白噪声向量，独立同分布，均值为零、方差为 σ^2 。

在接收端， M 个 CU 采样得到的信号构成了一个向量矩阵 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_M]^T$ ，同理， $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_M]^T$ ， $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}_1 \boldsymbol{\eta}_2 \dots \boldsymbol{\eta}_M]^T$ 。因此， \mathbf{X} 是一个 $M \times N$ 维的矩阵：

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(N) \\ x_2(1) & x_2(2) & \dots & x_2(N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_M(1) & x_M(2) & \dots & x_M(N) \end{bmatrix} \quad (2)$$

为了不失一般性，假设 \mathbf{S} 与 $\boldsymbol{\eta}$ 相互独立，则在 H_1 时，考虑 CU 接收信号和接收 PU 信号的统计协方差矩阵分别为

$$\mathbf{R}_x = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H], \quad \mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H] \quad (3)$$

其中， \mathbf{H} 表示共轭转置变换。

容易得出 $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_M$ ，在 H_0 时，由 $\mathbf{R}_s = 0$ 可知 $\mathbf{R}_x = \sigma^2 \mathbf{I}_M$ 。在实际的感知过程中，由于统计协方差矩阵难以准确计算，因此只能用有限的采样来估计协方差矩阵^[12]，即

$$\tilde{\mathbf{R}}_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{X}\mathbf{X}^H \quad (4)$$

2.2 MME 算法

令协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_x(N)$ 的最大最小特征值分别为 λ_{\max} 和 λ_{\min} 。基于 2.1 节的分析，在 H_0 和 H_1 时，最大最小特征值之比有差异，因此 MME 算法使用 $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 作为检验统计量来判决 PU 信号是否存在^[9]，即

$$T_{MME} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (5)$$

如果 $T_{MME} > \gamma_{MME}$ ，表明 PU 发射机信号存在；否则，PU 发射机信号不存在，其中， γ_{MME} 表示 MME 算法的判决门限。

在 H_0 时， $\tilde{\mathbf{R}}_x(N)$ 是 Wishart 随机矩阵^[13]，该矩阵的联合概率密度函数(PDF)极其复杂，文献[14]考

虑了噪声为实信号时的情形, 得出了 Wishart 随机矩阵 λ_{\max} 服从 Tracy-Widom 分布 $F_1(t)$ 的结论, 文献[15]则分析了噪声为复信号的情况。当采样数 N 较大时, 实信号和复信号时的 λ_{\max} 的均值和方差几乎相同, 仅其极限分布不同。与此同时, 文献[16]还给出了 Wishart 随机矩阵的最大最小特征值的收敛值。

文献[9]应用以上结论, 推导出 MME 算法的门限表达式

$$\gamma_{MME} = \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{M})^2}{(\sqrt{N} - \sqrt{M})^2} \cdot \left(1 + \frac{(\sqrt{N} + \sqrt{M})^{-2/3}}{(NM)^{1/6}} F_1^{-1}(1 - P_{fa}) \right) \quad (6)$$

其中, P_{fa} 为给定虚警概率。Tracy-Widom 分布的 1 阶累积分布函数(CDF) $F_1(t)$ [14]为

$$F_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q(u) + (u-t)q^2(u)) du\right) \quad (7)$$

其中, $q(u)$ 是 Painleve II 非线性微分方程 $q''(u) = uq(u) + 2q^3(u)$ 的解。

由此得出, 求取 $F_1(t)$ 的解析解表达式是非常困难的。Johnstone I M 在文献[17]中求出了 $F_1(t)$ 的一些离散值, 如表 1 所示, 表中列出了 F_1 在某些点处的值, 可以通过逆函数 $F_1^{-1}(y)$ 求得, 例如: $F_1^{-1}(0.95) = 0.98$, $F_1^{-1}(0.9) = 0.45$ 。

表 1 Tracy-Widom 第 1 分布的累积分布函数数值

$F_1(t)$	t
0.01	-3.90
0.05	-3.18
0.10	-2.78
0.30	-1.91
0.50	-1.27
0.70	-0.59
0.90	0.45
0.95	0.98
0.99	2.02

3 改进的最大最小特征值算法(NMME)

3.1 检测门限的确定

文献[8]所提出的 LSC 算法属于 RMT 渐近理论, 此类算法采用渐近值直接做近似, 在 CU 数目 M 和采样数 N 足够大时才有效。而在实际应用过程中, 由于各种各样的限制, 如感知时间的长短、信

道的时变特性等, N 一般取有限值, 而且 LSC 算法在给定虚警概率 P_{fa} 时判决门限恒定, 这将会极大地影响感知系统的性能及其可靠性, 因此对其应用有一定的限制。另外, 在小采样时, 其精度不高、误差较大, 从而降低了感知的准确性。

近年来, 随着 RMT 的发展, 发现当 M 和 $N \rightarrow \infty$ 时, Wishart 随机矩阵的 λ_{\min} 也服从 Tracy-Widom 分布[7], 而且进行门限确定时, 利用 λ_{\min} 的极限分布比目前所采用的 λ_{\max} 极限分布函数更加精确。

定理 1^[7] 若噪声为实信号, 令

$$A(N) = \frac{N}{\sigma^2} \mathbf{R}_\eta(N), \quad \mu = (\sqrt{N-1} - \sqrt{M})^2 \quad (8)$$

$$k = (\sqrt{N-1} - \sqrt{M}) \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} - \frac{1}{\sqrt{M}} \right)^{1/3} \quad (9)$$

假设 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = \rho (0 < \rho < 1)$, 则 $\frac{\lambda_{\min}(A(N)) - \mu}{k}$

必然服从 1 阶 Tracy-Widom 分布 $F_1(t)$ 。

定理 2^[16] 当 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} = \rho (0 < \rho < 1)$ 时

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\min} = \frac{\sigma^2}{N} a = \frac{\sigma^2}{N} (\sqrt{N} - \sqrt{M})^2 \quad (10)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{\max} = \frac{\sigma^2}{N} b = \frac{\sigma^2}{N} (\sqrt{N} + \sqrt{M})^2 \quad (11)$$

定理 1 给出的是采样协方差矩阵 λ_{\min} 的极限分布, 而定理 2 给出的是最大最小特征值的渐近值表达式。基于此, 提出了半渐近算法, 如 MME, 它克服了 LSC 渐近算法的缺点, 能够实时地调整门限, 从而提高了感知系统的性能及可靠性。下面在给定虚警概率 P_{fa} 的情况下, 用 λ_{\max} 的渐近值近似代替其本身, 推导出新的判决门限 γ , 由此得到的 NMME 算法的判决规则如下

$$T_{NMME} = \begin{cases} < \gamma, H_0 \\ \geq \gamma, H_1 \end{cases} \quad (12)$$

假设噪声为实信号, 则虚警概率 P_{fa} 可表示为

$$\begin{aligned} P_{fa} &= P(\lambda_{\max} > \gamma \lambda_{\min} | H_0) \\ &= P\left(\lambda_{\max} > \gamma \frac{\sigma^2}{N} \lambda_{\min}(A(N))\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(\lambda_{\min}(A(N)) < \frac{N}{\gamma\sigma^2} \lambda_{\max}\right) \\
 &\approx P\left((\lambda_{\min}(A(N)) - \mu)/k < \left(\frac{N}{\gamma\sigma^2} \frac{\sigma^2}{N} b - \mu\right)/k\right) \\
 &= P\left((\lambda_{\min}(A(N)) - \mu)/k < \left(\frac{b}{\gamma} - \mu\right)/k\right) \\
 &= F_1\left(\left(\frac{b}{\gamma} - \mu\right)/k\right) \tag{13}
 \end{aligned}$$

经过变换，求得 NMME 算法的判决门限为

$$\gamma = \frac{b}{\mu + kF_1^{-1}(P_{fa})} \tag{14}$$

依据定理 1 和定理 2 可得 b 、 μ 和 k 的值。

3.2 算法步骤

综上所述，可得 NMME 的算法步骤如下。

步骤 1 对数据进行采样，并据式(4)对接收信号采样协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{R}}_x(N)$ 进行估计。

步骤 2 通过对 $\tilde{\mathbf{R}}_x(N)$ 进行特征值分解，求得 λ_{\max} 和 λ_{\min} ，则检验统计量 $T_{NMME} = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 。

步骤 3 在给定虚警概率 P_{fa} 的条件下，据式(14)求得判决门限 γ 。

步骤 4 据式(12)进行判决，即当 $T_{NMME} < \gamma$ ， H_0 成立；否则， H_1 成立。

4 仿真结果及分析

下面对算法进行 Matlab 仿真实验，进行 10 000 次 Monte-Carlo 实验。在给定虚警概率 P_{fa} 时，比较 NMME、MME 和 ED 算法的检测性能。假设固定路径衰落，PU 发射机信号为经过升余弦脉冲成型的 QPSK 调制信号；考虑噪声不确定度的影响，NMME 与 MME 算法的噪声不确定度为 1 dB，ED- x dB 表示 ED 算法的噪声不确定度为 x dB，估计的噪声方差为 $\hat{\sigma}^2 = \alpha\sigma^2$ ，设噪声不确定度 $B = \max\{10\lg \alpha\}$ (dB)， α 服从 $[-B, B]$ 的均匀分布。

图 1 为不同 P_{fa} 情形下， $SNR = -20$ dB 时，认知用户数 M 和采样数 N 对 NMME 与 MME 算法门限值的影响。参考 $M=5$ ， $N=3\ 200$ 时的门限值曲线进行对照， $M=10$ 和 $N=9\ 600$ 时对应的门限值都减小，说明随着 M 或 N 的增大，算法性能将会提高。同时看出，NMME 算法的门限值曲线递增，而 MME 算法递减。在给定 P_{fa} 的情况

下，当 $P_{fa} < 0.5$ 时，由于 NMME 算法的门限值更小，因此其检测性能更优；当 $P_{fa} = 0.5$ 时，曲线相交，则二者检测性能相同；当 $P_{fa} > 0.5$ 时，MME 算法有着更好的检测性能。由于实用的认知系统要求 P_{fa} 都应是较小的值，所以 NMME 算法的检测性能将更加优越。

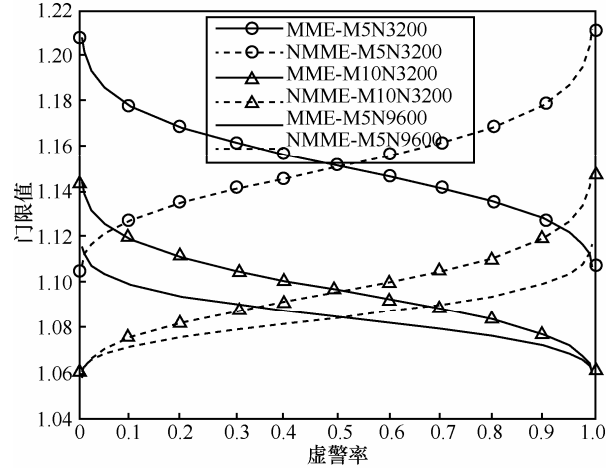


图 1 NMME 和 MME 算法的门限值曲线比较

图 2 是 3 种算法的检测率 P_d 随 SNR 变化的特性曲线。设 $P_{fa} = 0.1$ ，由图可知，如果噪声方差确知 ($B=0$)，则 ED 算法最优。如图 2(a)所示，当 $SNR = -20$ dB， $M=5$ ， $N=3\ 200$ 时，NMME 算法的 P_d 达到 52%，而 MME 算法仅 2%，ED-0.5dB 和 ED-1dB 分别为 9%和 5%，由此可见，实际情况中 ED 算法的性能远不如 NMME 算法，易受噪声方差的影响。比较图 2(a)和 2(b)可知， M 不变， N 由 3 200 增加到 9 600，NMME 算法的 P_d 能提高到 91%，MME 算法也能提高到 21%。再对图 2(a)和 2(c)进行比较， N 不变， M 由 5 增加到 10，NMME 和 MME 算法的 P_d 分别提高到 89%和 18%。可见，增加 M 或 N 使得算法的检测性能得到了提高。同时发现，ED-0.5dB 和 ED-1dB 算法的性能几乎没有变化，说明通过增加 M 或 N 并不能解决噪声不确定度问题。

图 3 是 3 种算法的实际 P_{fa} 随 SNR 变化的曲线。设给定 $P_{fa} = 0.1$ ， $N=9\ 600$ ，由图可知，NMME 和 MME 算法的实际 P_{fa} 在 0.1 附近，而 ED-0.5dB 与 ED-1dB 远大于 0.1，不满足给定 P_{fa} 要求，造成频谱利用率低，说明存在噪声不确定度时，ED 算法不够稳健。结合图 2 中 P_d 随 SNR 变化的特性曲线可以得出，在满足给定 P_{fa} 时，NMME 算法的 P_d 更高。

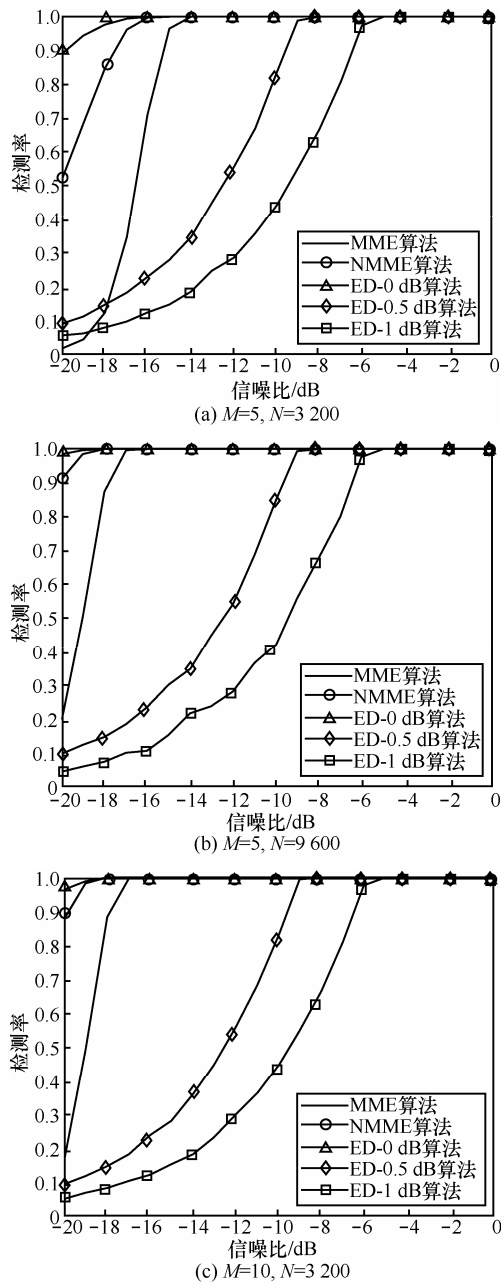


图 2 检测率 P_d 随信噪比变化的性能比较

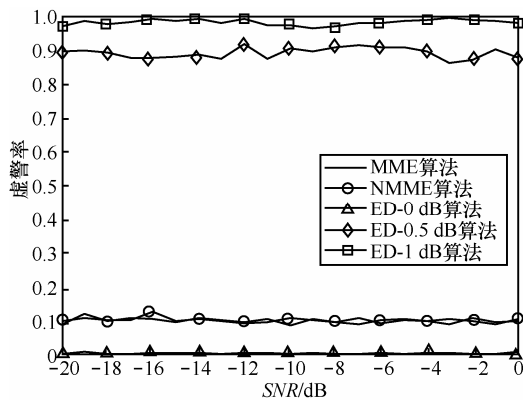


图 3 实际虚警率 P_{fa} 随信噪比变化的曲线

5 结束语

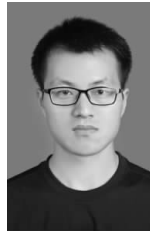
本文利用随机矩阵理论近年来的最新研究成果,应用更为精确的最小特征值的极限分布,并结合最大特征值的渐近值,提出了改进的 NMME 合作频谱感知和门限判决方法。通过 Matlab 仿真实验,并与 MME 和 ED 算法相比较可得, NMME 算法不但是一种盲检测算法,而且不受噪声不确定度的影响。在低虚警率时,判决门限比 MME 算法更低,从而在满足给定虚警率的条件下,检测概率更高,感知更加准确,体现了 NMME 算法的优越性。

参考文献:

- [1] SONG M, XIN C, ZHAO Y, *et al.* Dynamic spectrum access: from cognitive radio to network radio[J]. IEEE Wireless Communications, 2012,19(1):23-29.
- [2] YUCEK T, ARSLAN H. A survey of spectrum algorithms for cognitive radio applications[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2009,11(1):116-130.
- [3] DIGHAM F F, ALOUINI M S, SIMON M K. On the energy detection of unknown signals over fading channels[J]. IEEE Transaction on Wireless Communications, 2007, 55(1): 21-24.
- [4] 王颖喜, 卢光跃. 基于循环平稳特征的 OFDM 主用户感知的仿真研究[J]. 西安邮电学院学报, 2009,14(5):72-76.
- [5] WANG Y X, LU G Y. Primary user detection using cyclostationary properties of OFDM in cognitive radio systems[J]. Journal of Xi'an University of Posts and Telecommunications, 2009, 14(5):72-76.
- [6] ATAPATTU S, TELLAMBURA C, JIANG H. Energy detection based cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks[J]. IEEE Transaction on Wireless Communications, 2011, 10(4): 1232-1241.
- [7] 卢光跃, 弥寅, 包志强等. 基于特征结构的频谱感知算法[J]. 西安邮电大学学报, 2014,19(2):1-12.
- [8] LU G Y, MI Y, BAO Z Q, *et al.* The cooperative spectrum sensing algorithms based on eigenvalue structure of the received signal[J]. Journal of Xi'an University of Posts and Telecommunications, 2014, 19(2):1-12.
- [9] PENNA F, GARELLO R. Cooperative spectrum sensing based on the limiting eigenvalue ratio distribution in wishart matrices[J]. IEEE Communications Letters, 2009,13(7):507-509.
- [10] CARDOSO L S, DEBBAH M, BIANCHI P, *et al.* Cooperative spectrum sensing using random matrix theory[A]. ISWPC 2008 3rd International Symposium on Wireless Pervasive Computing[C]. Luxembourg, 2008.

- bourg, 2008.334-338.
- [9] ZENG Y H, LIANG Y C. Eigenvalue-based spectrum sensing algorithms for cognitive radio[J]. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(6): 1784-1793.
- [10] 杨晓妮, 卢光跃. 基于特征根比分布的协作频谱感知算法研究[J]. 西安邮电学院学报, 2010,15(5):5-8.
YANG X N, LU G Y. Cooperative spectrum sensing algorithms based on eigenvalues ratio distribution[J]. Journal of Xi'an University of Posts and Telecommunications, 2010,15(5):5-8.
- [11] 卢光跃, 弥寅, 包志强. 特征值极限分布的改进合作频谱感知[J]. 信号处理, 2014,30(3):261-267.
LU G Y, MI Y, BAO Z Q. Novel cooperative spectrum sensing based on limiting eigenvalue distribution[J]. Journal of Signal Processing, 2014,30(3):261-267.
- [12] LIU S L, SHEN J, ZHANG R, *et al.* Information on the theoretic criterion-based spectrum sensing for cognitive radio[J]. IET Communication, 2008,2(6):753-762.
- [13] TULINO A M, VERDU S. Random Matrix Theory and Wireless Communications[M]. Hanover, USA: Now Publisher Inc,2004:3-73.
- [14] DIKMESE S, RENFORS M. Performance analysis of eigenvalue based spectrum sensing under frequency selective channels[A]. 2012 7th International ICST Conference on Cognitive Radio Oriented Wireless Networks and Communications(CROWNCOM)[C]. 2012. 356-361.
- [15] BAIK J, BEN A G, PECHE S. Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices[J]. The Annals of Probability,2005,33(5):1643-1697.
- [16] BAI Z D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices,a review[J]. Statistica Sinica,1999,9(3):611-677.
- [17] JOHNSTONE I M. On the distribution of the largest eigenvalue in principle components analysis[J]. The Annals of statistics,2001, 29(2):295-327.

作者简介:



弥寅 (1986-), 男, 甘肃庆阳人, 西安邮电大学助理工程师, 主要研究方向为认知无线电频谱感知技术。

卢光跃 (1971-), 男, 河南南阳人, 博士, 西安邮电大学教授、博士生导师, 主要研究方向为现代移动通信中的信号处理等。