

基于反正切的网格混沌吸引子及其保密通信

毛学志^{1,2}, 徐勇³, 刘建平¹, 马会泉¹

(1. 河北科技师范学院 数学与信息科技学院, 河北 秦皇岛 066004;

2. 河北科技师范学院 数学与系统科学研究所, 河北 秦皇岛 066004; 3. 河北工业大学 理学院, 天津 300401)

摘要: 提出了一种用处处光滑的反正切函数序列生成多维多涡卷网格混沌吸引子的方法, 可以生成一维 n 涡卷、二维 $n \times m$ 网格多涡卷和三维 $n \times m \times l$ 网格多涡卷混沌吸引子。平衡点分析、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 映像都表明系统是混沌的。用简单的线性反馈控制实现了同结构网格多涡卷混沌系统之间的同步, 可应用于保密通信。简单的理论分析和数值仿真证明了该方法的有效性。

关键词: 混沌同步; 保密通信; 网格多涡卷吸引子; 反正切序列函数

中图分类号: O23

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)12-0106-10

Grid chaotic attractors based on arc tangent and its secure communication

MAO Xue-zhi^{1,2}, XU Yong³, LIU Jian-ping¹, MA Hui-quan¹

(1. College of Mathematics and Information Technology, Hebei Normal University of Science and Technology, Qinhuangdao 066004, China;

2. Institute of Mathematics and Systems Science, Hebei Normal University of Science and Technology, Qinhuangdao 066004, China;

3. School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: A smooth arc tangent function series approach for creating multi-directional multi-scroll grid chaotic attractors was proposed, including one-directional n -scroll, two-directional $n \times m$ -grid scroll, and three-directional $n \times m \times l$ -grid scroll chaotic attractors. The chaotic properties were studied by equilibrium points analysis, numerical simulation, Lyapunov exponents spectrum, bifurcation diagrams and Poincaré section diagrams. Synchronize the two grid multi-scroll chaotic systems with same structure by designing simple linear feedback control laws, which is applied to secure communication. The effectiveness of this method has been verified by simple analysis and numerical simulation.

Key words: chaos synchronization; secure communication; grid multi-scroll chaotic attractors; arc tangent function series

1 引言

近年来, 由于多涡卷混沌吸引子呈现出复杂的混沌动力学行为, 以及其在保密通信、信息隐藏等领域的广泛应用^[1~3], 使其成为混沌领域的一个热点问题, 引起了广大学者的密切关注, 相继报道了大量相关结果^[4~12]。Lü J H 等^[4,9]用分段线性函数、阈值、阶跃函数、时滞序列、饱和函数系列等生成多涡卷或网格多涡卷吸引子;

Yu S M 等^[5,6]采用在具有时滞电路的二端口网络中生成 $n \times m$ 吸引子以及用开关式分段线性控制器生成网格吸引子的方法; 陈仕必等^[7]用多项式和阶跃函数组合构造网格多涡卷吸引子; Günay E 等^[8]用三角函数生成单方向多涡卷吸引子; Xu F 等^[10]研究了具有双曲正切函数的多涡卷混沌系统的同步问题等。

文献[13]用反正切函数作为非线性项, 构造了一个新的具有双涡卷混沌吸引子的三维连续自

收稿日期: 2013-06-19; 修回日期: 2014-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (71071079); 河北科技师范学院重点学科和科研创新团队建设经费基金资助项目 (CXTD2012-08)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (71071079); The Key Disciplines and the Funds for Creative Research Groups of Hebei Normal University of Science and Technology (CXTD2012-08)

治混沌系统，并对系统的动力学特性进行了分析。由于多涡卷吸引子，特别是网格多涡卷吸引子较双涡卷吸引子具有更加复杂的结构和动力学特性，因而在保密通信、信息隐藏等方面具有更为广阔的应用前景。而生成网格多涡卷吸引子所构造的非线性项多为分段线性函数、时滞函数等非处处光滑的函数，处处光滑的函数比较少，特别是用超越函数作为非线性项生成网格多涡卷吸引子的报道更是凤毛麟角。一个重要的原因是用超越函数作为非线性项时，求解平衡点需解超越方程，而超越方程一般不能求得解析解，只有数值解或近似解，特殊的才有解析解，这给理论分析带来了一定程度的不便。本文在文献[13]用反正切函数生成双涡卷的基础上做了如下改进：对反正切函数进行了适当比例的缩放，以便于求解平衡点的解析解；将反正切函数进行平移拓展，构造了一个新的处处光滑的反正切函数序列，并用它代替原系统的非线性项，可在 x 轴上生成一维 n 涡卷混沌吸引子；通过改变或增加反正切函数序列，可使涡卷向 y 轴和 z 轴方向延伸，从而可生成二维 $n \times m$ 网格多涡卷和三维 $n \times m \times l$ 网格多涡卷混沌吸引子。平衡点分析、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 映像都表明系统是混沌的。同原有文献相比，本文构造的反正切函数序列具有下面的特点：1) 构造的反正切函数序列处处光滑，并且幅度及平衡点的位置和个数等参数可调；2) 由于恰当地构造了反正切函数序列，很容易得到平衡点的解析解，巧妙地解决了一般的超越方程不易求得解析解的问题，从而便于精确地计算和理论分析。相对于文献[13]用反正切函数生成的双涡卷混沌吸引子而言，用反正切函数序列生成的网格多涡卷混沌吸引子具有更复杂的动力学特性和更多的密钥参数，因而在保密通信中具有更为优越的保密性能。

混沌同步在保密通信、生命科学等领域有着广阔的应用前景。1990 年，美国的研究员 Pecora L M 等^[14]首次提出了一种混沌同步的方法，此后，人们对混沌同步的研究产生了极大的热情，提出了各种同步方法^[15,16]。本文通过构造简单的线性反馈控制器，实现了网格多涡卷同结构混沌系统之间的同步，Lyapunov 稳定性理论分析和数值仿真结果表明 2 个系统达到了很好的同步，从而在保密通信等

领域中存在着潜在的应用价值。

2 反正切函数序列

定义 1 称下列函数

$$f(x, k, r, s) = \begin{cases} \frac{k}{\arctan k} \arctan(x - 2kr) + 2kr, & x \leq (2r + 1)k \\ \frac{k}{\arctan k} \arctan(x - 2ki) + 2ki, & (2i - 1)k < x \leq (2i + 1)k, i = r + 1, \dots, s - 1 \\ \frac{k}{\arctan k} \arctan(x - 2ks) + 2ks, & x > (2s - 1)k \end{cases} \quad (1)$$

为反正切函数序列，其中参数 k 是正实数， r 和 s 为整数且 $r < s$ ，“ \arctan ”表示反正切函数。函数 $f(x, k, r, s)$ 的图形如图 1 所示。易知， $f(x, k, r, s)$ 为处处光滑函数，并且当 $x = ik$ 时 $f(ik, k, r, s) = ik$ ($2r - 1 \leq i \leq 2s + 1$)，对所有的 $j = r, \dots, s + 1$ 都有

$$\frac{d}{dx} f((2j - 1)k, k, r, s) = \frac{k}{(1 + k^2) \arctan k}$$

对于所有的 $j = r, \dots, s$ 有

$$\frac{d}{dx} f(2jk, k, r, s) = \frac{k}{\arctan k}$$

这将使产生多涡卷混沌吸引子问题变得简单。

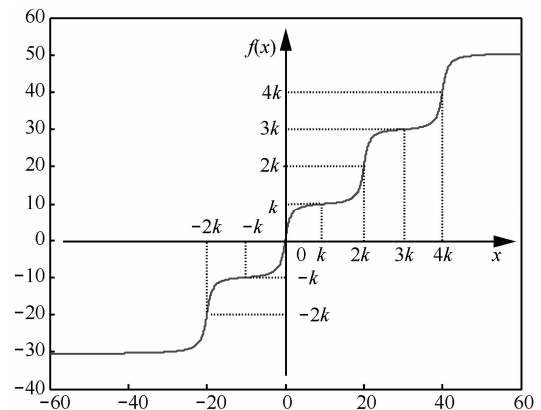


图 1 $k=10, r=-1, s=2$ 的反正切函数序列

张建雄等构造了一个三维连续自治混沌系统，其数学模型为^[13]

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -a(x + y + z) + b \arctan x \end{cases} \quad (2)$$

当参数 $a = 0.45, b = 4.5$ 时，系统存在一个混沌吸引子。本文在此基础上通过用处处光滑的反正

切函数序列改变或增加系统(2)中的非线性项生成网格多涡卷混沌吸引子。

3 生成多维多涡卷网格吸引子

3.1 生成一维 n 涡卷混沌吸引子

用处处光滑的反正切函数序列改变系统(2)中的非线性项, 下列系统可产生一维 n 涡卷混沌吸引子

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -a(x+y+z-f(x,k_1,r_1,s_1)) \end{cases} \quad (3)$$

其中, $f(x,k_1,r_1,s_1)$ 为式(1)所定义的反正切函数序列, a, k_1 为正实数, r_1 和 s_1 为整数且 $r_1 < s_1$ 。适当选择参数可生成 $(s_1 - r_1 + 2)$ 涡卷混沌吸引子。

当 $a=0.3, k_1=35, r_1=-1, s_1=2$, 系统(3)可生成 5 涡卷混沌吸引子。仿真结果如图 2 所示。

3.1.1 平衡点

显然, 系统(3)有 $2(s_1 - r_1) + 3$ 个位于 x 轴上的平衡点 $E_i(ik, 0, 0)$ ($i = 2r_1 - 1, \dots, 2(s_1 + 1) - 1$), 且可分为 2 类

$$\begin{aligned} A_x &= \{(2j-1)k_1\}, \quad j = r_1, \dots, s_1 + 1 \\ B_x &= \{2jk_1\}, \quad j = r_1, \dots, s_1 \end{aligned} \quad (4)$$

对于集合 A_x 中的平衡点, Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a + \frac{ak_1}{(1+k_1^2)\arctan k_1} & -a & -a \end{pmatrix} \quad (5)$$

解特征方程 $|\lambda I - J| = 0$ 得

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + a - \frac{ak_1}{(1+k_1^2)\arctan k_1} = 0 \quad (6)$$

当 $a=0.3, k_1=35$ 时特征值为 $\lambda_1 = -0.6063, \lambda_{2,3} = 0.1531 \pm 0.6799i$, 此时 A_x 中的平衡点为 2 类鞍点, 注意涡卷只在 2 类鞍点附近才可能产生, 所以系统有可能生成 $(s_1 - r_1 + 2)$ 涡卷混沌吸引子。

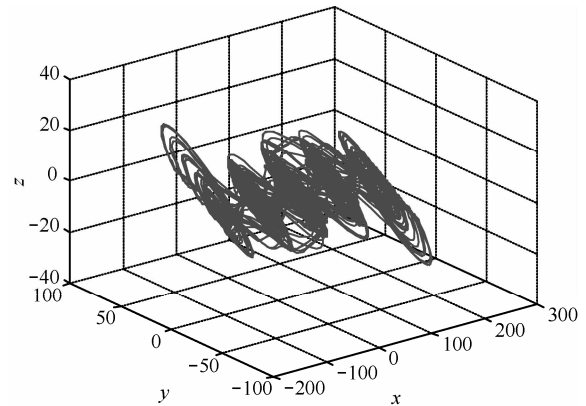
集合 B_x 中的平衡点, 其 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a + \frac{ak_1}{\arctan k_1} & -a & -a \end{pmatrix} \quad (7)$$

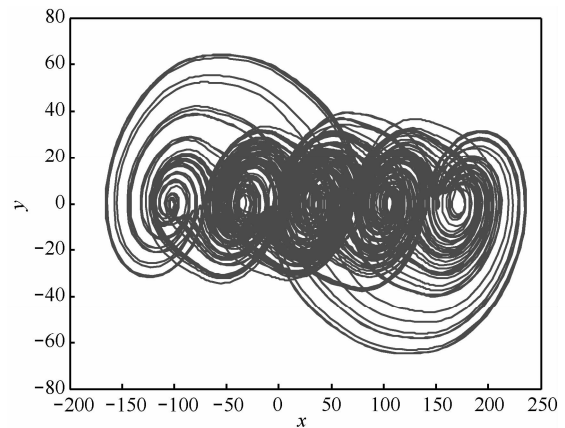
解特征方程 $|\lambda I - J| = 0$ 得

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + a - \frac{ak_1}{\arctan k_1} = 0 \quad (8)$$

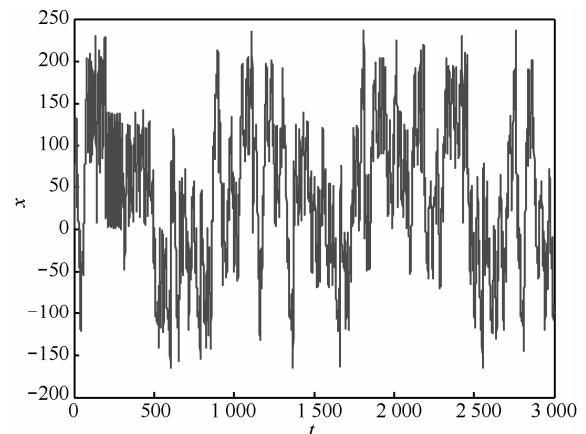
当 $a=0.3, k_1=35$ 时得特征值为 $\lambda_1 = 1.7216, \lambda_{2,3} = -1.0108 \pm 1.6609i$, 此时 B_x 中的平衡点为 1 类鞍点。



(a) x - y - z 三维相图



(b) x - y 二维相图



(c) x 的状态曲线

图 2 5 涡卷混沌吸引子

3.1.2 Lyapunov 指数 (LE) 谱与分岔图

本文用 Jacobian 矩阵法计算最大 Lyapunov 指数, 当 $a=0.3$, $k_1=35$, $r_1=-1$, $s_1=2$ 时, 求得 Lyapunov 指数为 $LE_1=0.1731$, $LE_2=0$, $LE_3=-0.4756$, 表明系统为混沌系统。系统的 Lyapunov 维数为

$$\begin{aligned} D_L &= j + \frac{1}{|LE_{j+1}|} \sum_{i=1}^j LE_i \\ &= 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|} \\ &= 2 + \frac{0.1731}{0.4756} = 2.364 \end{aligned}$$

由此可见, 系统的维数为分数维数, 验证了系统为混沌系统。

下面用 Lyapunov 指数谱与分岔图说明参数变化对系统的影响情况。

情况 1 固定参数 $k_1=35$, $r_1=-1$, $s_1=2$, 改变 a , $a \in [0.1, 1]$ 。

当 a 在 $[0.1, 1]$ 变化时, 系统的 LE 谱图如图 3 所示。当 $a \in [0.1, 0.15]$ 时, 有 2 个大于零的 LE 和一个小于零的 LE, 此时系统为不稳定的; 当 $a \in (0.15, 0.74)$ 时, 有一个大于零的 LE, 一个等于或接近于零的 LE 和一个小于零的 LE, 此时系统是混沌的; 当 $a \in [0.74, 0.81]$ 时, 最大 LE 时而大于零, 时而等于或接近于零, 此时系统为混沌与周期交替出现; 当 $a \in (0.81, 1]$ 时, 最大 LE 等于零, 此时系统为周期运动。

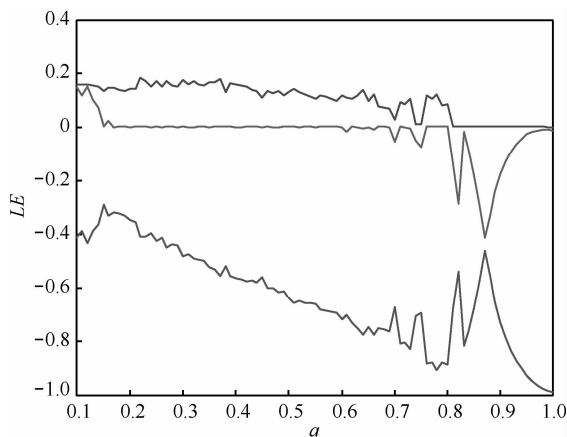


图 3 当 a 变化时系统的 LE 谱

当 a 在 $[0.1, 1]$ 变化时, x 的分岔图如图 4 所示。由分岔图也可以判断出类似于上述根据 LE 谱得到的分析结果。

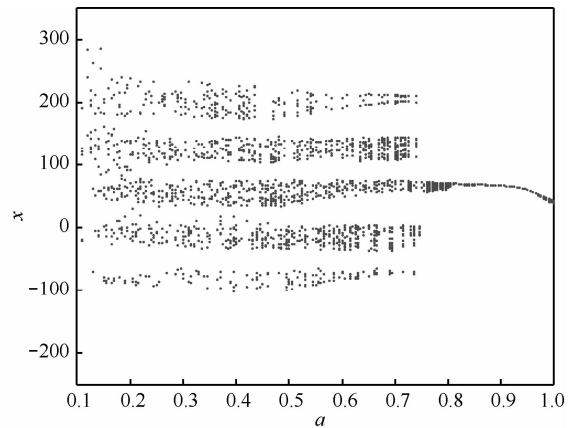
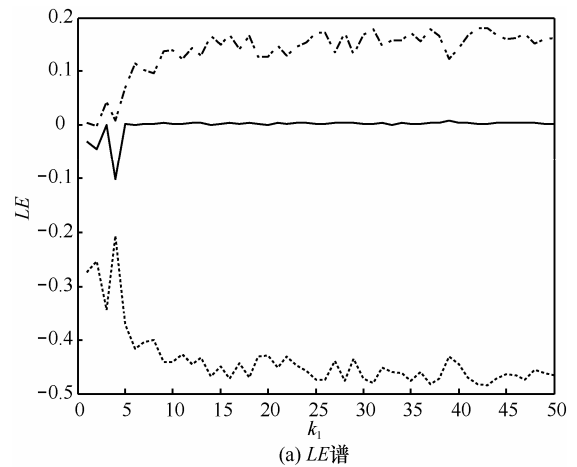
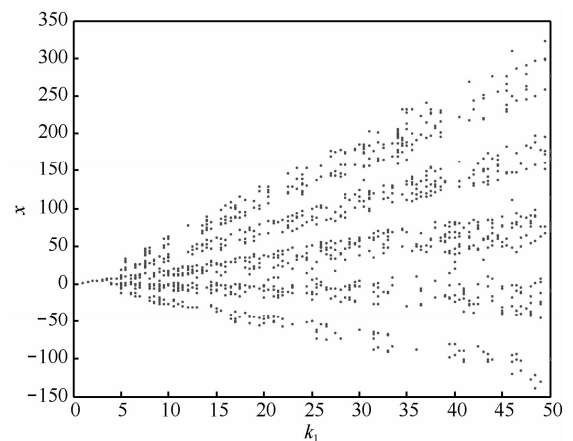


图 4 a 变化时, x 的分岔图

情况 2 固定参数 $a=0.3$, $r_1=-1$, $s_1=2$, 改变 k_1 , 当 $k_1 \in [1, 50]$, 系统的 LE 谱和分岔图如图 5 所示。由 LE 谱和分岔图可以看出, 当 $k_1 \in [5, 50]$ 时, 系统呈现混沌特性。



(a) LE 谱



(b) x 的分岔图

图 5 k_1 变化时系统的 LE 谱和 x 的分岔图

3.1.3 Poincaré 截面

对参数 $a=0.3$, $k_1=35$, $r_1=-1$, $s_1=2$, 取

过原点的平面 $z=0$ 作截面, 得 Poincaré 映像如图 6 所示。由图 6 可见, 截面上的截点形成线状或片状的稠密点集, 说明了此时系统的运动是混沌的。

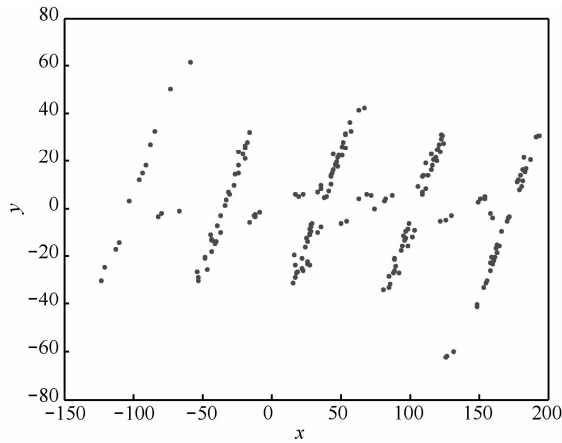


图 6 Poincaré 映像

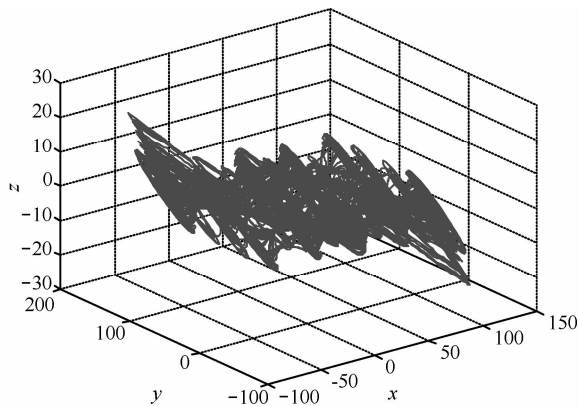
3.2 生成二维 $n \times m$ 涡卷网格混沌吸引子

为生成二维 $n \times m$ 涡卷混沌吸引子, 在系统(3)中增加一个反正切函数序列, 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(y, k_2, r_2, s_2) \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -a(x + y + z - f(x, k_1, r_1, s_1)) + af(y, k_2, r_2, s_2) \end{cases} \quad (9)$$

其中, $f(x, k_1, r_1, s_1)$ 和 $f(y, k_2, r_2, s_2)$ 为式(1)所定义的函数, 参数 a 为正常数。适当地选择参数, 可生成 $(s_1 - r_1 + 2) \times (s_2 - r_2 + 2)$ 涡卷混沌吸引子。

当 $a=0.3$, $k_1=k_2=20$, $r_1=-1$, $s_1=2$, $r_2=0$, $s_2=2$ 时, 系统(9)可生成 5×4 涡卷混沌吸引子。仿真结果如图 7 所示, 图 7(b)表明其在 x 轴方向上有 5 个涡卷, 在 y 轴方向上有 4 个涡卷。



(a) x - y - z 相图

除式(4)以外系统(9)还有如下平衡点

$$\begin{aligned} A_y &= \{(2j-1)k_2\}, \quad j=r_2, \dots, s_2+1 \\ B_y &= \{2jk_2\}, \quad j=r_2, \dots, s_2 \end{aligned} \quad (10)$$

所有平衡点可以分成 4 类不同的集合

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x^*, y^*) \mid x^* \in A_x, y^* \in A_y\} \\ C_2 &= \{(x^*, y^*) \mid x^* \in A_x, y^* \in B_y\} \\ C_3 &= \{(x^*, y^*) \mid x^* \in B_x, y^* \in A_y\} \\ C_4 &= \{(x^*, y^*) \mid x^* \in B_x, y^* \in B_y\} \end{aligned}$$

对于集合 C_1 中的平衡点, Jacobian 矩阵为

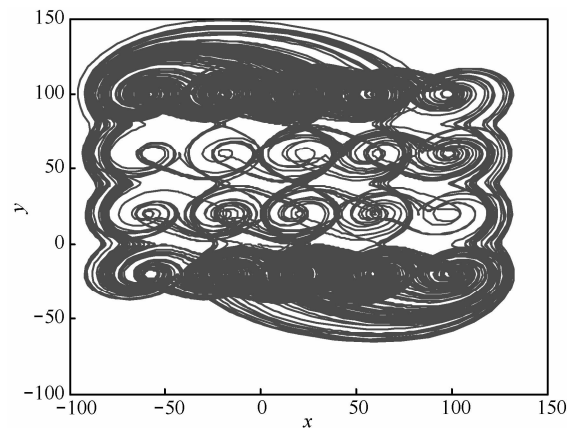
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{k_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a + \frac{ak_1}{(1+k_1^2)\arctan k_1} & -a + \frac{ak_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} & -a \end{pmatrix} \quad (11)$$

解特征方程 $|\lambda I - J| = 0$ 得

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \left[a - \frac{ak_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} \right] \lambda + \left[a - \frac{ak_1}{(1+k_1^2)\arctan k_1} \right] \left[1 - \frac{k_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} \right] = 0 \quad (12)$$

当 $a=0.3$, $k_1=k_2=20$ 时得特征值为 $\lambda_1 = -0.5986$, $\lambda_{2,3} = 0.1493 \pm 0.6683i$, 说明集合 C_1 的平衡点为 2 类鞍点, 可能生成 $(s_1 - r_1 + 2) \times (s_2 - r_2 + 2)$ 涡卷混沌吸引子。

当 $a=0.3$, $k_1=k_2=20$, $r_1=-1$, $s_1=2$, $r_2=0$, $s_2=2$ 时, Lyapunov 指数为 $LE_1 = 0.1289$, $LE_2 = 0$,



(b) x - y 相图

图 7 5×4 涡卷混沌吸引子

$LE_3 = -0.432 5$ ，Lyapunov 维数为 2.298，类似 3.1 节，Lyapunov 指数谱、分岔图及 Poincaré 截面分析均表明，此时系统(9)的运动是混沌的。

此时，集合 C_2 中的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = 2.153 3$ ， $\lambda_{2,3} = -1.226 6 \pm 0.364 3i$ ；集合 C_3 中的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = 1.369 1$ ， $\lambda_{2,3} = -0.834 5 \pm 1.370 7i$ ；集合 C_4 中的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = -3.992 2$ ， $\lambda_{2,3} = 1.846 1 \pm 2.772 5i$ 。 C_1 和 C_4 中的平衡点都是 2 类鞍点，都有可能产生混沌吸引子，但数值仿真表明只有 C_1 中的平衡点能够生成混沌吸引子。事实上，2 类鞍点只是生成混沌吸引子的必要条件，而不是充分条件。

3.3 生成 3 维 $n \times m \times l$ 涡卷网格混沌吸引子

为生成 3 维 $n \times m \times l$ 涡卷网格混沌吸引子，再次向系统(3)中添加一个反正切函数序列。系统可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(y, k_2, r_2, s_2) \\ \dot{y} = z - f(z, k_3, r_3, s_3) \\ \dot{z} = -a(x + y + z - f(x, k_1, r_1, s_1)) + af(y, k_2, r_2, s_2) + af(z, k_3, r_3, s_3) \end{cases} \quad (13)$$

其中， $f(x, k_1, r_1, s_1)$ ， $f(y, k_2, r_2, s_2)$ ， $f(z, k_3, r_3, s_3)$ 为式(1)所定义的反正切函数序列， a 为正常数。适当的选择参数，系统可生成 $(s_1 - r_1 + 2)(s_2 - r_2 + 2) \cdot (s_3 - r_3 + 2)$ 涡卷网格混沌吸引子。

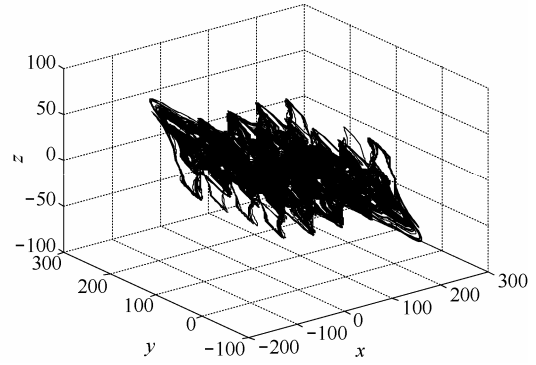
当 $a = 0.6$ ， $k_1 = k_2 = 30$ ， $k_3 = 13$ ， $r_1 = -1$ ， $s_1 = 2$ ， $r_2 = 0$ ， $s_2 = 2$ ， $r_3 = 0$ ， $s_3 = 1$ 时，系统(13)可生成 $5 \times 4 \times 3$ 网格混沌吸引子。仿真结果如图 8 所示。由图 8 可以明显看出其在 x 轴方向上有 5 涡卷，在 y 轴方向上有 4 涡卷，在 z 轴上有 3 涡卷。

除式(4)和式(10)以外系统还有如下平衡点

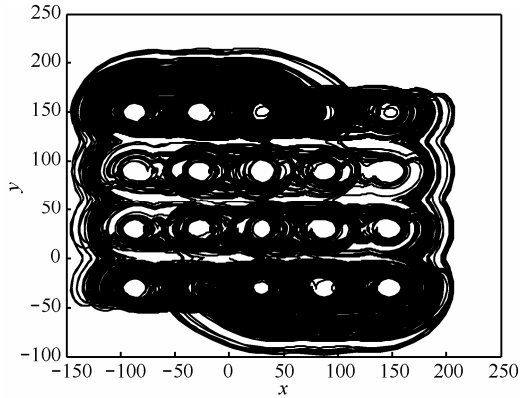
$$\begin{aligned} A_z &= \{(2j - 1)k_3\}, j = r_3, \dots, s_3 + 1 \\ B_z &= \{2jk_3\}, j = r_3, \dots, s_3 \end{aligned} \quad (14)$$

所有平衡点可分为如下 8 类不同的集合

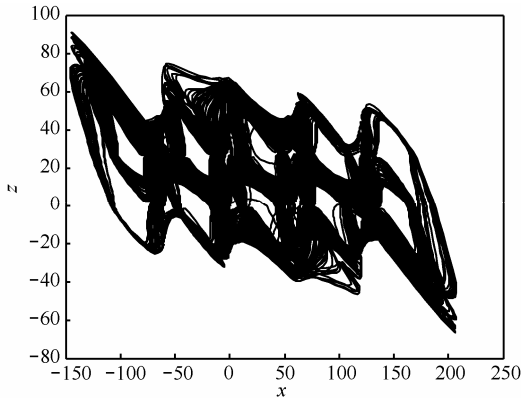
- $D_1 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in A_x, y^* \in A_y, z^* \in A_z\}$
- $D_2 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in A_x, y^* \in A_y, z^* \in B_z\}$
- $D_3 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in A_x, y^* \in B_y, z^* \in A_z\}$
- $D_4 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in A_x, y^* \in B_y, z^* \in B_z\}$
- $D_5 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in B_x, y^* \in A_y, z^* \in A_z\}$
- $D_6 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in B_x, y^* \in A_y, z^* \in B_z\}$
- $D_7 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in B_x, y^* \in B_y, z^* \in A_z\}$
- $D_8 = \{(x^*, y^*, z^*) \mid x^* \in B_x, y^* \in B_y, z^* \in B_z\}$



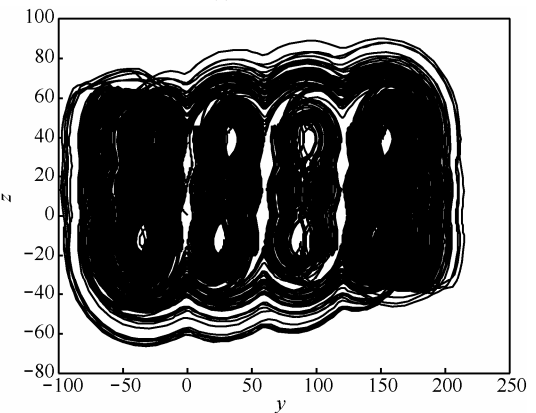
(a) x-y-z 相图



(b) x-y 相图



(c) x-z 相图



(d) y-z 相图

图 8 $5 \times 4 \times 3$ 网格混沌吸引子

对于集合 D_1 中的平衡点, Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 - \frac{k_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{k_3}{(1+k_3^2)\arctan k_3} \\ -a + \frac{ak_1}{(1+k_1^2)\arctan k_1} & -a + \frac{ak_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} & -a + \frac{ak_3}{(1+k_3^2)\arctan k_3} \end{pmatrix} \quad (15)$$

解特征方程 $|\lambda I - J| = 0$ 得

$$\lambda^3 + \left[a - \frac{ak_3}{(1+k_3^2)\arctan k_3} \right] \lambda^2 + \left[a - \frac{ak_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} \right] \left[1 - \frac{k_3}{(1+k_3^2)\arctan k_3} \right] \lambda + \left[a - \frac{ak_1}{(1+k_1^2)\arctan k_1} \right] \left[1 - \frac{k_2}{(1+k_2^2)\arctan k_2} \right] \left[1 - \frac{k_3}{(1+k_3^2)\arctan k_3} \right] = 0 \quad (16)$$

当 $a=0.6$, $k_1=k_2=30$, $k_3=13$ 时得特征值为 $\lambda_1 = -0.768 0$, $\lambda_{2,3} = 0.099 3 \pm 0.836 5i$, 说明集合 D_1 的平衡点为 2 类鞍点, 可能生成 $(s_1 - r_1 + 2) \cdot (s_2 - r_2 + 2)(s_3 - r_3 + 2)$ 涡卷混沌吸引子。类似可得集合 D_2 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = 5.574 2$, $\lambda_{2,3} = -0.476 7 \pm 0.752 5i$; 集合 D_3 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = -2.955 0$, $\lambda_2 = -1.023 5$, $\lambda_3 = 3.409 2$; 集合 D_4 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = -0.923 1$, $\lambda_{2,3} = 2.772 0 \pm 9.109 1i$; 集合 D_5 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = 1.924 7$, $\lambda_{2,3} = -1.247 0 \pm 1.949 9i$; 集合 D_6 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = -3.500 5$, $\lambda_{2,3} = 4.060 7 \pm 2.723 8i$; 集合 D_7 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = -6.617 4$, $\lambda_{2,3} = 3.024 0 \pm 4.509 8i$; 集合 D_8 的平衡点具有特征值 $\lambda_1 = 10.615 5$, $\lambda_{2,3} = -2.997 3 \pm 11.840 4i$ 。 D_1 、 D_4 、 D_6 、 D_7 中的平衡点都是 2 类鞍点, 都有可能产生混沌吸引子, 但只有 D_1 中的平衡点生成了混沌吸引子。

当 $a=0.6$, $k_1=k_2=30$, $k_3=13$, $r_1=-1$, $s_1=2$, $r_2=0$, $s_2=2$, $r_3=0$, $s_3=1$ 时, Lyapunov 指数为 $LE_1 = 0.123 4$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.482 9$, Lyapunov 维数为 2.256, 类似 3.1 节, Lyapunov 指数谱、分岔图及 Poincaré 截面分析, 均表明此时系统(9)的运动是混沌的。

4 网格多涡卷混沌吸引子同步

以三维网格多涡卷混沌吸引子为例, 一维和二维情况类似。选择系统(13)为驱动系统, 受控的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{x}' = y' - f(y', k_2, r_2, s_2) + u_1 \\ \dot{y}' = z' - f(z', k_3, r_3, s_3) + u_2 \\ \dot{z}' = -a(x' + y' + z') + af(x', k_1, r_1, s_1) + af(y', k_2, r_2, s_2) + af(z', k_3, r_3, s_3) + u_3 \end{cases} \quad (17)$$

其中, u_1 、 u_2 、 u_3 为控制器。定义误差 $e_x = x' - x$, $e_y = y' - y$, $e_z = z' - z$, 选择反馈控制器 $u_1 = -\xi_1 e_x$, $u_2 = -\xi_2 e_y$, $u_3 = -\xi_3 e_z$, 其中控制增益 $\xi_i > 0 (i=1, 2, 3)$, 则误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_x = e_y - [f(y', k_2, r_2, s_2) - f(y, k_2, r_2, s_2)] - \xi_1 e_x \\ \dot{e}_y = e_z - [f(z', k_3, r_3, s_3) - f(z, k_3, r_3, s_3)] - \xi_2 e_y \\ \dot{e}_z = -a(e_x + e_y + e_z) + a[f(x', k_1, r_1, s_1) - f(x, k_1, r_1, s_1)] + a[f(y', k_2, r_2, s_2) - f(y, k_2, r_2, s_2)] + a[f(z', k_3, r_3, s_3) - f(z, k_3, r_3, s_3)] + \xi_3 e_z \end{cases} \quad (18)$$

通过选取适当的增益 $\xi_i (i=1, 2, 3)$, 可以使误差系统达到渐进稳定。

由式(1)易得 $0 < \frac{d}{dx} f(x, k, r, s) \leq \frac{k}{\arctan k}$, 所以

对于任意实数 x 和 x' , 都有

$$|f(x', k, r, s) - f(x, k, r, s)| \leq \frac{k}{\arctan k} |x' - x|$$

成立。进而, 对于任意的实数 x , x' 和 e , 都有

$$\begin{aligned} & [f(x', k, r, s) - f(x, k, r, s)]e \\ & \leq \frac{1}{2} \{ [f(x', k, r, s) - f(x, k, r, s)]^2 + e^2 \} \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k}{\arctan k} \right)^2 (x' - x)^2 + e^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

对于误差系统(18)，构造 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)$ ，若记 $M_i = \left(\frac{k_i}{\arctan k_i}\right)^2$ ($i=1, 2, 3$)，则有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z = -\xi_1 e_x^2 - \xi_2 e_y^2 - (\xi_3 + a)e_z^2 + e_y e_x - [f(y', k_2, r_2, s_2) - f(y, k_2, r_2, s_2)]e_x + \\ & e_z e_y - [f(z', k_3, r_3, s_3) - f(z, k_3, r_3, s_3)]e_y - a e_x e_z - a e_y e_z + a[f(x', k_1, r_1, s_1) - f(x, k_1, r_1, s_1)]e_z + \\ & a[f(y', k_2, r_2, s_2) - f(y, k_2, r_2, s_2)]e_z + a[f(z', k_3, r_3, s_3) - f(z, k_3, r_3, s_3)]e_z \\ & \leq -\xi_1 e_x^2 - \xi_2 e_y^2 - (\xi_3 + a)e_z^2 + \frac{1}{2}(e_y^2 + e_x^2) + \frac{1}{2}[M_2 e_y^2 + e_x^2] + \frac{1}{2}(e_z^2 + e_y^2) + \frac{1}{2}(M_3 e_z^2 + e_y^2) + \\ & \frac{a}{2}(e_x^2 + e_z^2) + \frac{a}{2}(e_y^2 + e_z^2) + \frac{a}{2}[M_1 e_x^2 + e_z^2] + \frac{a}{2}[M_2 e_y^2 + e_z^2] + \frac{a}{2}[M_3 e_z^2 + e_z^2] \\ & = -\left(\xi_1 - 1 - \frac{a + aM_1}{2}\right)e_x^2 - \left(\xi_2 - \frac{3 + M_2 + a + aM_2}{2}\right)e_y^2 - \left(\xi_3 - \frac{1 + 3a + aM_3 + M_3}{2}\right)e_z^2 \end{aligned} \quad (20)$$

因此，只要选择增益

$$\begin{cases} \xi_1 > 1 + \frac{a + aM_1}{2} \\ \xi_2 > \frac{3 + M_2 + a + aM_2}{2} \\ \xi_3 > \frac{1 + 3a + aM_3 + M_3}{2} \end{cases} \quad (21)$$

就有 $\dot{V} \leq 0$ ，从而误差系统是渐进稳定的，系统(17)和系统(13)达到同步。

式(21)是经过了几次放大后得到的，实际仿真表明，增益的取值小于式(21)限定的值时，系统就能达到同步。

利用 Matlab 进行仿真，系统参数 $a=0.6$ ， $k_1=k_2=30$ ， $k_3=13$ ， $r_1=-1$ ， $s_1=2$ ， $r_2=0$ ， $s_2=2$ ， $r_3=0$ ， $s_3=1$ ，驱动系统和响应系统初值分别取 $(0.3, 0.4, 0.3)^T$ 和 $(1, -0.7, 0.8)^T$ ，控制增益 $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 3$ ， $5 \times 4 \times 3$ 网格混沌吸引子同步过程如图 9 所示。由图 9 可以看出，在控制器的作用下，误差系统在短时间内趋近于 0，并很快稳定下来，说明 2 个系统很好地实现了混沌同步。

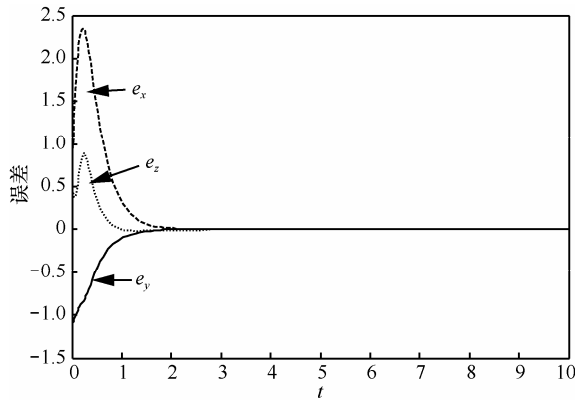


图 9 $5 \times 4 \times 3$ 网格混沌吸引子同步误差曲线

5 混沌掩盖保密通信

设需要传输的信号为 $m(t)$ ，在发送端将需要传输的信号 $m(t)$ 和驱动系统中的混沌信号 x 叠加，产生混合信号 $s(t) = m(t) + x(t)$ 发送到信道中。对式(13)略作修改，得如下驱动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f(y, k_2, r_2, s_2) + \xi_1 m(t) \\ \dot{y} = z - f(z, k_3, r_3, s_3) \\ \dot{z} = -a(x + y + z) + bf(x, k_1, r_1, s_1) + af(y, k_2, r_2, s_2) + af(z, k_3, r_3, s_3) \end{cases} \quad (22)$$

响应系统如式(17)所示，其中 $u_1 = -\xi_1(x' - s(t))$ ， $u_2 = -\xi_2(y' - y)$ ， $u_3 = -\xi_3(z' - z)$ ，控制增益 $\xi_i > 0$ ($i=1, 2, 3$)。在接收端，只需从 $s(t)$ 中减去受控系统产生的混沌信号 $x'(t)$ ，就可恢复出有用信号 $m'(t)$ ，即 $m'(t) = s(t) - x'(t)$ ，原始信号与还原信号的信号误差 $e(t) = m(t) - m'(t)$ 。选取第 4 节混沌同步仿真中相同的参数，混沌掩盖保密通信的仿真如图 10 所示。从图 10 可以看出，还原信号经过短暂的时间后能够完全跟踪原始信号。

6 结束语

利用处处光滑的反正切函数序列生成了多维多涡卷混沌吸引子，包括一维 n 涡卷、二维 $n \times m$ 网格多涡卷和三维 $n \times m \times l$ 网格多涡卷混沌吸引子。生成多维多涡卷混沌吸引子的基本思想是通过适当地调整参数，在不同的方向上 (x 轴、 y 轴和 z 轴) 改变平衡点的数量和位置。由于恰当地构造了反正切函数序列，很容易准确地找到平衡点的位置，便于进行理论分析，平衡点分析、数值仿真、Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 映像均表明系统为混沌。

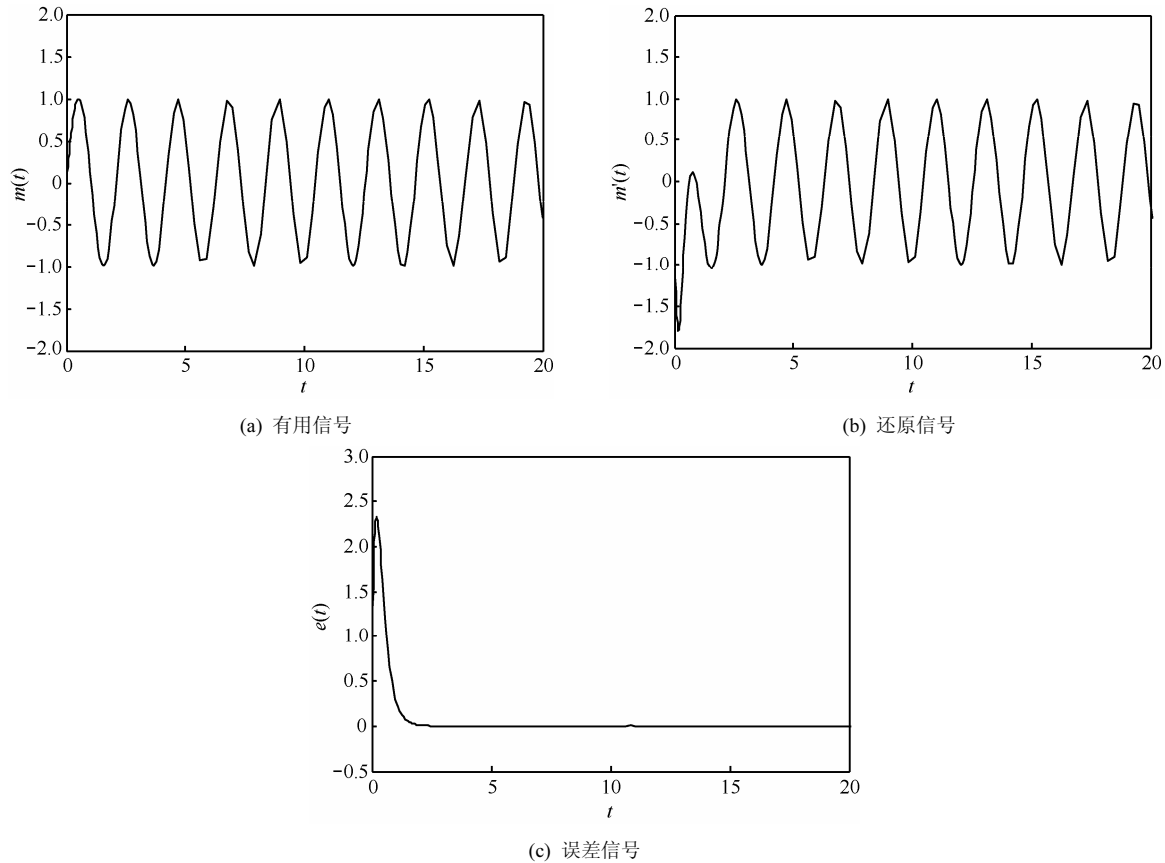


图 10 有用信号、还原信号及误差信号

依据 Lyapunov 稳定性理论, 通过构造简单的线性反馈控制, 实现了 2 个同结构网格多涡卷混沌系统的同步, 利用同步实现了混沌掩盖通信, 仿真结果进一步表明该方法的有效性。进一步为其他处处光滑的曲线生成网格多涡卷混沌吸引子, 以及其在保密通信等领域的应用提供了一定的借鉴意义。

参考文献:

- [1] 于娜, 丁群, 陈红. 异结构系统混沌同步及其在保密通信中的应用[J]. 通信学报, 2007, 28(10):73-78.
YU N, DING Q, CHEN H. Synchronization of different structure chaotic systems and the application in secure communication[J]. Journal on Communications, 2007, 28(10):73-78.
- [2] 瞿少成, 王晓燕, 田文汇等. 混沌同步技术在保密通信中的仿真研究[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2008, 42(4):553-556, 561.
QU S C, WANG X Y, TIAN W H, *et al.* Research on chaotic synchronized secure communication[J]. Journal of Huazhong Normal University (Nat Sci), 2008, 42(4):553-556, 561.
- [3] 朱勇, 王佳楠, 丁群. 新型的 CD-DCSK 混沌键控保密通信系统[J]. 通信学报, 2012, 33(5):169-176.
ZHU Y, WANG J N, DING Q. New kind of CD-DCSK chaos shift keying secure communication system[J]. Journal on Communications, 2012, 33(5):169-176.
- [4] LÜ J H, CHEN G R. Generating multiscroll chaotic attractors: theories, methods and applications[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2006, 16(4):775-858.
- [5] YU S M, TANG K S. Generation of $n \times m$ -scroll attractors in a two-port RCL network with hysteresis circuits[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2009, 39(2):821-830.
- [6] ZHANG C X, YU S M. Generation of grid multi-scroll chaotic attractors via switching piecewise linear controller[J]. Physics Letters A, 2010, 374(30):3029-3037.
- [7] 陈仕必, 曾以成, 徐茂林等. 用多项式和阶跃函数构造网格多涡卷混沌吸引子及其电路实现[J]. 物理学报, 2011, 60(2):020507.
CHEN S B, ZENG Y C, XU M L, *et al.* Construction of grid multi-scroll chaotic attractors and its circuit implementation with polynomial and step function[J]. Acta Phys Sin, 2011, 60(2):020507.
- [8] GÜNAY E, KILIC R. A new way of generating N -scroll attractors via trigonometric function[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2011, 21(3):897-901.
- [9] LÜ J H, MURALI K, SINHA S, *et al.* Generating multi-scroll chaotic attractors by thresholding[J]. Physics Letters A, 2008, 372:3234-3239.
- [10] XU F, YU P. Global stabilization and synchronization of n -scroll chaotic attractors in a modified chua's circuit with hyperbolic tangent function[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2009, 19(8):2563-2572.
- [11] LIU X Z, SHEN X M, ZHANG H T. Multi-scroll chaotic and hyperchaotic attractors generated from Chen system[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012, 22(2):1-15.
- [12] 王春华, 尹晋文, 林愿. 基于电流传输器的网格多涡卷混沌电路设计与实现[J]. 物理学报, 2012, 61(21):210507-1-210507-8.
WANG C H, YIN J W, LIN Y. Design and realization of grid multi-scroll chaotic circuit based on current conveyers[J]. Acta Phys

Sin, 2012, 61(21):1-8.

- [13] 张健雄, 唐万生, 徐勇. 一个新的三维混沌系统[J]. 物理学报, 2008, 57(11):6799-6807.

ZHANG J X, TANG W S, XU Y. A new three-dimensional chaotic system[J]. Acta Phys Sin, 2008, 57(11):6799-6807.

- [14] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8):821-824.

- [15] 王兴元, 段朝锋. 基于线性状态观测器的混沌同步及其在保密通信中的应用[J]. 通信学报, 2005, 26(6):105-111.

WANG X Y, DUAN C F. Observer based chaos synchronization and its application to secure communication[J]. Journal on Communications, 2005, 26(6):105-111.

- [16] 黄丽莲, 齐雪. 基于自适应滑模控制的不同维分数阶混沌系统的同步[J]. 物理学报, 2013, 62(8):1-7.

HUANG L L, QI X. The synchronization of fractional order chaotic systems with different orders based on adaptive sliding mode control[J]. Acta Phys Sin, 2013, 62(8):1-7.



徐勇 (1971-), 男, 山东蒙阴人, 河北工业大学副教授, 主要研究方向为复杂系统、图论。



刘建平 (1980-), 男, 河北滦南人, 河北科技师范学院讲师, 主要研究方向为混沌系统在保密通信中的应用、认知网。

作者简介:



毛学志 (1969-), 男, 河北卢龙人, 河北科技师范学院副教授, 主要研究方向为混沌系统、swarm 系统等。



马会泉 (1971-), 男, 河北秦皇岛人, 河北科技师范学院讲师, 主要研究方向为基础数学、应用数学。

(上接第 105 页)

- [14] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2009, 55(5):2230-2249.

- [15] BLUMENSATH T, DAVIES M. Gradient pursuits[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2008, 56(6):2370-2382.

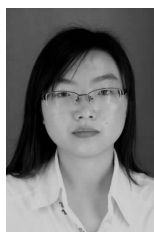
- [16] ZHU L, QIU C T. Newton pursuit algorithm for sparse signal reconstruction in compressed sensing[J]. IEEE Computer Science and Information Technology, 2010, 6:463-466.

- [17] YUAN Y X, SUN W Y. Theory and Methods of Optimization[M]. Beijing: Science Press, 1997.



李雷 (1958-), 男, 安徽砀山人, 南京邮电大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为模式识别与智能系统、智能信息处理。

作者简介:



刘盼盼 (1990-), 女, 江苏扬州人, 南京邮电大学硕士生, 主要研究方向为压缩感知理论及其在信号处理中的应用。



王浩宇 (1992-), 男, 山西太原人, 主要研究方向为压缩感知理论及其在信号处理中的应用。