

## 压缩感知中基于变尺度法的贪婪重构算法的研究

刘盼盼, 李雷, 王浩宇

(南京邮电大学 非结构化数据计算理论与应用研究中心, 江苏 南京 210046)

**摘 要:** 首先将最优化方法中的梯度法与贪婪算法相结合, 在已有梯度追踪算法的基础上提出了基于变尺度法的梯度追踪 (VMMGP) 算法, 分析比较这些算法的计算复杂度和存储需求; 其次用这些算法分别重构一维、二维信号, 分析比较了算法重构效果及其性能好坏。实验结果表明, 对于一维信号和二维信号的重构, 所提出的 VMMGP 算法, 重构效果是所有梯度追踪算法中最好的。

**关键词:** 正交匹配追踪; 梯度方向; 梯度追踪; 变尺度法; 计算复杂度; 存储需求

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)12-0098-08

## Research on greedy reconstruction algorithms of compressed sensing based on variable metric method

LIU Pan-pan, LI Lei, WNAG Hao-yu

(Unstructured Data Calculation Theory and Application Research Center, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China)

**Abstract:** A variable metric method based gradient pursuit algorithm based on some existing gradient pursuit algorithms was proposed by combining the gradient direction of optimization methods with greedy algorithms. The computational complexity and storage requirements of these algorithms were also analysed and compared. In experimental part, all these algorithms were used to reconstruct one-dimensional audio signal and two-dimensional image signal. Experimental results show that the VMMGP algorithm has the best reconstruction performance among all the gradient pursuit algorithms.

**Key words:** orthogonal matching pursuit; gradient direction; gradient pursuit; variable metric method; computational complexity; storage requirements

### 1 引言

压缩感知 (CS, compressed sensing) 理论<sup>[1-4]</sup>由 Donoho 等人于 2004 年提出, 它指出只要信号是可压缩的或在某个变换域是稀疏的, 就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换所得的高维信号投影到一个低维空间上, 然后通过求解一个优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原信号。

设  $y \in R^M$  是一个已知向量, 称为测量,  $\Phi \in R^{M \times N}$  ( $M < N$ ) 是一个矩阵, 称为字典或者测量矩阵,  $\Phi$  的每列  $\phi_i$  称为原子。令  $x \in R^N$  是一个长度为  $N$  的信号, 称  $x$  是  $K$ -稀疏的 (或可压缩的), 如果信号  $x$  可以在某些线性变换下通过  $K$  ( $K \ll N$ )

个系数被很好地估计。压缩感知问题就是在已知测量  $y$  和测量矩阵  $\Phi$  条件下找到满足

$$y = \Phi x + \varepsilon \quad (1)$$

的向量  $x$ , 其中  $\varepsilon \in R^M$  是测量误差。如果  $\varepsilon = 0$ , 该问题为精确信号表示问题, 如果  $\varepsilon \neq 0$ , 该问题为信号估计问题。

CS 理论的核心问题是信号的重构问题, 如何构造稳定、对观测数据要求少、计算复杂度低、收敛速度快、顽健性强的重构算法一直是 CS 理论重构算法研究的目标。目前, 学者们已研究出许多压缩感知的重构算法。这些算法主要分为 2 类, 一类是使用线性规划的方法, 例如基追踪 (BP, basis pursuit)<sup>[5]</sup>、稀疏重构的梯度投影 (GPSR, gradient pro-

收稿日期: 2013-08-26; 修回日期: 2013-10-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61070234, 61071167)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61070234, 61071167)

jection for sparse reconstruction)<sup>[6]</sup>、迭代阈值(IT, iterative thresholding)<sup>[7]</sup>和迭代硬阈值(IHT, iterative hard thresholding)<sup>[8]</sup>等。这类算法由于它们的高计算复杂度，对于大规模数据问题可能会不适用。另一类算法是基于迭代贪婪追踪的思想，例如匹配追踪(MP, matching pursuit)<sup>[9]</sup>、正交匹配追踪(OMP, orthogonal matching pursuit)<sup>[10]</sup>、分段正交匹配追踪(StOMP, stagewise orthogonal matching pursuit)<sup>[11]</sup>、正则正交匹配追踪(ROMP, regularized orthogonal matching pursuit)<sup>[12]</sup>、压缩采样匹配追踪(CoSAMP, compressive sampling matching pursuit)<sup>[13]</sup>、子空间追踪(SP, subspace pursuit)<sup>[14]</sup>等。这些贪婪算法由于它们的快速迭代过程而被广泛应用。

但是由于贪婪类算法都是通过正交投影来计算估计信号的，而正交投影在实际计算中需要很大的计算量，这就减弱了贪婪类算法重构信号的效率。为了克服这一缺点，Thomas Blumensath 等首先提出了梯度追踪(GP, gradient pursuit)算法<sup>[15]</sup>，利用计算梯度方向来代替正交投影，这就减少了贪婪类算法的计算复杂度。梯度追踪算法就是本文重点研究的内容。

本文首先将近年提出的梯度追踪算法，例如梯度追踪<sup>[15]</sup>、共轭梯度追踪(CGP, conjugate gradient pursuit)<sup>[15]</sup>、近似共轭梯度追踪(ACGP, approximate conjugate gradient pursuit)<sup>[15]</sup>以及牛顿追踪(NP, Newton pursuit)<sup>[16]</sup>算法进行分析总结，在此基础上提出基于变尺度法的梯度追踪(VMMGP, variable metric method based gradient pursuit)算法，同时分析了它们的计算复杂度和存储需求。其次，分别通过一维信号和二维信号的实验仿真分析了这些梯度追踪算法的重构性能。实验结果表明，所有梯度追踪算法在重构一维信号和二维信号时，无论在重构时间还是重构效果方面均优于 OMP，尤其是本文提出的 VMMGP 算法，重构效果是所有梯度追踪算法中最好的，并且重构时间优于 ACGP 和 CGP。

符号说明：本文的所有算法都是迭代的，并且当前的迭代次数是  $n$ 。 $\Gamma^n$  称为索引集，表示一个包含已选择原子的索引集合，每经过一次迭代， $\Gamma^n$  的元素个数都会增。使用索引集  $\Gamma^n$  中的元素作为下标，矩阵  $\Phi_{\Gamma^n}$  表示矩阵  $\Phi$  的子矩阵，它仅仅由  $\Gamma^n$  中元素所对应的  $\Phi$  的列组成。这种表示方式也可以用于向量，例如向量  $x_{\Gamma^n}$  是向量  $x$  的子向量，它仅仅由  $\Gamma^n$  中元素所对应的  $x$  元素组成。一般来说，小写

字母表示向量，大写字母表示矩阵，向量中的单个元素用下标表示，例如  $g$  表示一个梯度向量， $g_i$  表示  $g$  的第  $i$  个元素。向量内积用尖括号表示，例如  $\langle x, y \rangle = y^T x$ 。

## 2 梯度追踪背景知识

梯度追踪算法是为了解决贪婪算法对于大规模数据问题不可行而提出的，它集贪婪算法以及最优化的梯度思想于一体，大大减少了贪婪算法的计算复杂度。梯度追踪是基于 2 个基础的贪婪算法——MP 和 OMP，并产生了梯度追踪框架。

### 2.1 MP 和 OMP

MP 和 OMP 算法都是利用迭代的方法来估计向量  $y$ 。在第  $n$  次迭代中，通过

$$y^n = \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n} \quad (2)$$

来计算估计测量，并且通过

$$r^n = y - y^n \quad (3)$$

来计算残差。

在每次迭代中，残差被用来作为决定是否从测量矩阵  $\Phi$  中选择一个新元素的终止准则，以便找到一个更好的估计值。

最简单的贪婪算法就是 MP。MP 通过现有残差  $r^n$  和  $\Phi$  的列的内积来选择新元素，并且更新稀疏信号  $x$  的相关元素。

OMP 是 MP 的一个改进。OMP 在每次迭代中通过将  $y$  正交地投影到所有已经选择的原子上来更新估计  $x$ ，这使每次迭代所得的残差都和已选的原子是正交的，也就是说 OMP 不会重复地选择原子。OMP<sup>[15]</sup>算法总结如下。

**Step 1** 初始化  $r^0 = y$ ,  $x^0 = 0$ ,  $\Gamma^0 = \emptyset$

**Step 2**  $n = 1; n := n + 1$  直到满足终止准则

**Step 2.1**  $g^n = \langle r^{n-1}, \Phi \rangle$

**Step 2.2**  $i^n = \arg \max_i |g_i^n|$

**Step 2.3**  $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \cup i^n$

**Step 2.4**  $x^n = \Phi_{\Gamma^n}^+ y$

**Step 2.5**  $r^n = y - \Phi x^n$

**Step 3** 输出  $r^n, x^n$

这里  $\Phi^+$  表示  $\Phi$  的广义逆。贪婪算法的主要缺点就是它们都需要额外的空间来存储  $\Phi$ ，对于大规模数据问题， $\Phi$  的存储以及  $\Phi^+$  的计算将导致贪婪算法不可行。

## 2.2 梯度追踪框架

在第  $n$  次迭代中, OMP 其实就是通过解如下的无约束最优化问题

$$\min \|y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}\|_2^2 \quad (4)$$

来得到估计  $x_{\Gamma^n}$ 。这其实就是解一个无约束最优化问题。如果单纯地利用最优化方法<sup>[17]</sup>中的牛顿法、共轭梯度法、变尺度法等来求解的话, 又会出现计算量太大而无法重构信号的问题。但是 OMP 等贪婪算法有着快速的迭代过程, 所以 Thomas Blumensath 等利用解无约束最优化问题的梯度方法来代替 OMP 的正交投影, 提出了梯度投影算法, 大大降低了计算复杂度。梯度追踪算法利用

$$x_{\Gamma^n}^n = x_{\Gamma^n}^{n-1} + a_n d_{\Gamma^n}^n \quad (5)$$

来更新估计  $x_{\Gamma^n}$ , 其中  $d_{\Gamma^n}^n$  是更新方向,  $a^n$  是步长,  $a^n$  的计算如下

$$a^n = \frac{\langle r^n, \Phi_{\Gamma^n} d^n \rangle}{\|\Phi_{\Gamma^n} d^n\|_2^2} \quad (6)$$

选择不同的  $d_{\Gamma^n}^n$  就可以得到不同的梯度追踪算法<sup>[15]</sup>。总结梯度追踪类算法得到梯度追踪算法框架如下。

**Step 1** 初始化  $r^0 = y$ ,  $x^0 = 0$ ,  $\Gamma^0 = \emptyset$

**Step 2**  $n = 1; n := n + 1$  直到满足终止准则

**Step 2.1**  $g^n = \langle r^{n-1}, \Phi \rangle$

**Step 2.2**  $i^n = \arg \max_i |g_i^n|$

**Step 2.3**  $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \cup i^n$

**Step 2.4** 计算更新方向  $d_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.5**  $a^n = \frac{\langle r^n, \Phi_{\Gamma^n} d_{\Gamma^n}^n \rangle}{\|\Phi_{\Gamma^n} d_{\Gamma^n}^n\|_2^2}$

**Step 2.6**  $x_{\Gamma^n}^n = x_{\Gamma^n}^{n-1} + a^n d_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.7**  $r^n = r^{n-1} - a^n \Phi_{\Gamma^n} d_{\Gamma^n}^n$

**Step 3** 输出  $r^n, x^n$

## 2.3 梯度追踪算法

在梯度追踪框架中, 选择不同的更新方向就可以得到不同的梯度追踪算法。本节将已有的梯度追踪算法进行总结, 首先介绍 Thomas Blumensath 等提出的 3 种梯度追踪算法: 梯度追踪、共轭梯度追踪和近似共轭梯度追踪, 然后再介绍由 Zhu Lei 等提出的牛顿追踪。

### 2.3.1 梯度追踪

解无约束最优化问题的最简单并且有效的方法为最速下降法。最速下降法就是使用目标函数的负梯度作为更新方向。目标函数  $\|y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}\|_2^2$  关于  $x$  的梯度为

$$g_{\Gamma^n} = \Phi_{\Gamma^n}^T (y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}^{n-1}) \quad (7)$$

使用这个梯度作为更新方向, 替代梯度追踪框架中步骤 2.4 中的  $d_{\Gamma^n}^n$  就得到了一个方向追踪算法, 叫做梯度追踪<sup>[15]</sup>算法。

### 2.3.2 共轭梯度追踪

解无约束最优化问题的另一个著名的方法是共轭梯度法。共轭梯度法要求当前更新方向和之前的更新方向是共轭的。将共轭梯度法的思想运用到梯度追踪框架中, 此时目标函数为

$$\|y - \Phi_{\Gamma^n} x_{\Gamma^n}\|_2^2$$

也就是使得当前的更新方向和以前已使用的所有更新方向  $G_{\Gamma^n}$  - 共轭, 其中  $G_{\Gamma^n} = \Phi_{\Gamma^n}^T \Phi_{\Gamma^n}$ 。每当选择一个新的原子, 目标函数的维数  $n$  都会增加。令  $d_{\Gamma^n}^k$  是第  $k$  个共轭方向, 下标表示向量  $d_{\Gamma^n}^k$  是  $|\Gamma^n|$  维的。表示每一个新的更新方向为所有先前已选择的方向和当前梯度  $g_{\Gamma^n}$  的组合

$$d_{\Gamma^n}^n = b_0 g_{\Gamma^n} + \mathbf{D}_{\Gamma^n}^{n-1} b \quad (8)$$

其中,  $\mathbf{D}_{\Gamma^n}^{n-1}$  表示第  $n-1$  次迭代中的所有共轭更新方向组成的矩阵,  $\mathbf{D}_{\Gamma^n}^{n-1}$  表示在  $\mathbf{D}_{\Gamma^{n-1}}^{n-1}$  的底部增加一行全为 0 的元素构成的矩阵。不失一般性, 令  $b_0 = 1$ 。利用  $G_{\Gamma^n}$  - 共轭的性质, 可以得到

$$b = -((\mathbf{D}_{\Gamma^n}^{n-1})^T G_{\Gamma^n} \mathbf{D}_{\Gamma^n}^{n-1})^{-1} ((\mathbf{D}_{\Gamma^n}^{n-1})^T G_{\Gamma^n} g_{\Gamma^n}) \quad (9)$$

将式(8)替代梯度追踪框架中步骤 2.4 的  $d_{\Gamma^n}^n$  就得到了共轭梯度追踪<sup>[15]</sup>算法。

和 CGP 相似的一种算法为基于 QR 分解的 OMP 算法。文献[15]指出基于 QR 分解的 OMP 算法和 CGP 有着相同的复杂度和存储需求。

### 2.3.3 近似共轭梯度追踪

在每次迭代中, CGP 使用全部的共轭梯度来计算更新方向, 为了降低 CGP 算法的计算复杂度, 提出了近似共轭梯度追踪<sup>[15]</sup>算法。ACGP 使用一个近似的共轭方向来代替 CGP 的精确共轭方向。这个近似共轭方向仅仅和有限数量的先前方向  $G_{\Gamma^n}$  - 共轭, 使计算更加容易, 并且此时所需的计算存储

要求相对于存储所有的先前更新方向也大大地减少了。为了表示简单，这里只使用一个更新方向来阐述 ACGP 算法。更一般的情形类似。

近似共轭方向表示为当前梯度和前一方向的组合

$$d_{r^n}^n = b_0 g_{r^n} + d_{r^n}^{n-1} b_1 \quad (10)$$

同样令  $b_0 = 1$ ，由于  $d_{r^n}^n$  和  $d_{r^n}^{n-1}$   $G_{r^n}$  - 共轭，有

$$\langle (G_{r^n} d_{r^n}^{n-1}), (g_{r^n} + d_{r^n}^{n-1} b_1) \rangle = 0 \quad (11)$$

由式(11)可以计算得

$$b_1 = -\frac{\langle (\Phi_{r^n} d_{r^n}^{n-1}), (\Phi_{r^n} g_{r^n}) \rangle}{\|\Phi_{r^n} d_{r^n}^{n-1}\|_2^2} \quad (12)$$

将式(10)替代梯度追踪框架中步骤 2.4 的  $d_{r^n}^n$  就得到了 ACGP 算法。

### 2.3.4 牛顿追踪

牛顿法是另一种简单的解决无约束最优化问题的方法。牛顿法利用目标函数  $f(x)$  的一阶导数和二阶导数（二阶 Hessian 矩阵）来求更新方向，即在第  $n$  次迭代中，更新方向  $d$  的计算如下

$$\nabla^2 f(x^n) d = -\nabla f(x^n) \quad (13)$$

将牛顿法计算更新方向的思想运用到梯度追踪框架中就得到一种新的梯度追踪算法——牛顿追踪<sup>[16]</sup>。对应于梯度追踪框架，式(13)中的  $-\nabla f(x^n)$

即为  $g_{r^n} = \Phi_{r^n}^T (y - \Phi_{r^n} x_{r^n}^{n-1})$ ， $\nabla^2 f(x^n)$  即为  $-\Phi_{r^n}^T \Phi_{r^n}$ ，也即 NP 利用下式更新梯度方向

$$\Phi_{r^n}^T \Phi_{r^n} d_{r^n}^n = -g_{r^n} \quad (14)$$

## 3 基于变尺度法的梯度追踪算法

解无约束最优化问题除了上文提到的最速下降法、牛顿法、共轭梯度法之外，还有变尺度法。变尺度法又称为拟牛顿法，是解无约束最优化问题的最有效的方法之一。

### 3.1 基于变尺度法的梯度追踪算法的思想

和牛顿法相比，变尺度法不要求二阶 Hessian 矩阵，而是只利用一阶导数来构造二阶信息的近似矩阵，从而该算法有较好的收敛性质。

变尺度法<sup>[17]</sup>利用一个近似的正定对称矩阵  $B^n$  来代替牛顿法中的 Hessian 矩阵  $\nabla^2 f(x^n)$ ，这样，在第  $n$  次迭代中，变尺度法计算更新方向  $d$  如下

$$B^n d = -\nabla f(x^n)$$

并且初始化  $B^0 = I$ 。令  $s^n = x^{n+1} - x^n$ ， $t^n = \nabla f(x^{n+1}) - \nabla f(x^n)$ ，则拟牛顿方程可表示为

$$B^{n+1} s^n = t^n$$

$B^{n+1}$  可用下式更新

$$B^{n+1} = B^n - \frac{B^n s^n (s^n)^T B^n}{(s^n)^T B^n s^n} + \frac{t^n (t^n)^T}{(t^n)^T s^n} \quad (15)$$

这样，式(15)计算得到的  $B^{n+1}$  也是正定对称矩阵。这就是变尺度法的主要思想，将该思想嵌入梯度追踪框架中，就可以得到一个新的梯度追踪算法——基于变尺度法的梯度追踪。

VMMGP 算法最核心的部分就是如何在第  $n$  次迭代中构造矩阵  $B_{r^n}^n$ 。值得注意的是每次迭代，VMMGP 和 OMP 一样都会选择一个新原子，这样目标函数的维数都会增加。从式(15)可知， $B_{r^n}^n$  的构造需要用到前一次迭代中得到的  $B_{r^{n-1}}^{n-1}$ 。为了解决  $B_{r^n}^n$  和  $B_{r^{n-1}}^{n-1}$  的维数匹配问题，将  $B_{r^{n-1}}^{n-1}$  进行行列扩充，即在  $B_{r^{n-1}}^{n-1}$  的最底部和最右侧分别添加一行和一列，添加的行和列除了对角线元素为 1，其他元素全为 0。在第  $n$  次迭代中，VMMGP 采用了和 OMP 一样的原子选择策略，即首先计算梯度  $g^n = \langle r^{n-1}, \Phi \rangle$ ，并且选择  $g^n$  中绝对值最大元素的索引值添加到索引集中。然后，VMMGP 通过式(16)更新方向  $d_{r^n}^n$

$$B_{r^n}^{n-1} d_{r^n}^n = g^n \quad (16)$$

并且初始化  $B^0 = 1$ 。令

$$s_{r^n}^n = x_{r^n}^n - x_{r^n}^{n-1} = a^n d_{r^n}^n,$$

$$\begin{aligned} t_{r^n}^n &= g_{r^n}^n - g_{r^n}^{n-1} = (\Phi_{r^n}^T)^T (y - \Phi_{r^n} x_{r^n}^{n-1}) - \\ &\quad (\Phi_{r^n}^T)^T (y - \Phi_{r^n} x_{r^n}^n) \\ &= (\Phi_{r^n}^T)^T \Phi_{r^n} (x_{r^n}^n - x_{r^n}^{n-1}) \\ &= (\Phi_{r^n}^T)^T \Phi_{r^n} s_{r^n}^n \end{aligned}$$

$B_{r^n}^n$  可更新如下

$$B_{r^n}^n = B_{r^n}^{n-1} - \frac{B_{r^n}^{n-1} s_{r^n}^n (s_{r^n}^n)^T B_{r^n}^{n-1}}{(s_{r^n}^n)^T B_{r^n}^{n-1} s_{r^n}^n} + \frac{t_{r^n}^n (t_{r^n}^n)^T}{(t_{r^n}^n)^T s_{r^n}^n} \quad (17)$$

VMMGP 算法总结如下。

**Step 1** 初始化  $r^0 = y$ ， $x^0 = 0$ ， $\Gamma^0 = \emptyset$ ， $B^0 = 1$

**Step 2**  $n = 1$ ;  $n := n + 1$  直到满足终止准则

**Step 2.1**  $g^n = \langle r^{n-1}, \Phi \rangle$

**Step 2.2**  $i^n = \arg \max_i |g_i^n|$

**Step 2.3**  $\Gamma^n = \Gamma^{n-1} \cup i^n$

**Step 2.4** 通过式(16)计算更新方向  $d_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.5**  $a^n = \frac{\langle r^n, \Phi_{\Gamma^n} d_{\Gamma^n}^n \rangle}{\|\Phi_{\Gamma^n} d_{\Gamma^n}^n\|_2^2}$

**Step 2.6**  $s_{\Gamma^n}^n = x_{\Gamma^n}^n - x_{\Gamma^n}^{n-1} = a^n d_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.7**  $t_{\Gamma^n}^n = g_{\Gamma^n}^{n-1} - g_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.8** 通过式(17)更新  $B_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.9**  $x_{\Gamma^n}^n = x_{\Gamma^n}^{n-1} + a^n d_{\Gamma^n}^n$

**Step 2.10**  $r^n = r^{n-1} - a^n \Phi_{\Gamma^n} d_{\Gamma^n}^n$

**Step 3** 输出  $r^n, x^n$ 。

### 3.2 基于变尺度法的梯度追踪算法的收敛性

VMMGP 作为一个 OMP 的近似算法，最重要的就是它是否具有收敛性。下面本文给出一个定理来说明它的收敛性。

**定理 1** 存在一个仅仅依赖于字典  $\Phi$  的常量  $c < 1$ ，使得 VMMGP 计算的残差按如下规律递减

$$\|r^n\|_2^2 \leq c \|r^{n-1}\|_2^2$$

**证明** 因为  $r^n = r^{n-1} - a^n \Phi_{\Gamma^n} d$ ，所以

$$\|r^n\|_2^2 = \|r^{n-1}\|_2^2 - \frac{\langle r^{n-1}, \Phi_{\Gamma^n} d \rangle^2}{\|\Phi_{\Gamma^n} d\|_2^2}$$

又因为  $d = \Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}$ ，所以

$$\begin{aligned} \frac{\|\Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}\|_2^4}{\|\Phi_{\Gamma^n} \Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}\|_2^2} &\geq \frac{\|\Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}\|_2^4}{\|\Phi_{\Gamma^n}\|_2^2 \|\Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}\|_2^2} \\ &\geq \frac{\|\Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}\|_2^2}{\|\Phi_{\Gamma^n}\|_2^2} \geq \frac{\|\Phi_{\Gamma^n}^T r^{n-1}\|_\infty^2}{\|\Phi_{\Gamma^n}\|_2^2} \end{aligned}$$

由  $l_\infty$ -范数和  $l_2$ -范数之间的关系，对于任意的  $x$ ，存在  $\omega > 0$ ，使  $\|\Phi^T x\|_\infty > \omega \|x\|_2$ 。由于 VMMGP 算法的原子选择过程中有  $\|\Phi^T x\|_\infty = \|\Phi_{\Gamma^n}^T x\|_\infty$ 。

所以当  $c = 1 - \frac{\omega}{\|\Phi\|_2^2}$  时，定理成立，其中  $\|\Phi\|_2^2 \geq$

$\|\Phi_{\Gamma^n}\|_2^2$  是字典  $\Phi$  的  $l_2$ -范数。证毕。

由此可见，VMMGP 算法作为一种重构算法是可行的。

## 4 计算复杂度分析

本文介绍了 5 种算法来解决或者近似 OMP，文献[15]表明 CGP 的计算复杂度和存储需求和基于 QR 分解的 OMP 算法相似。另外 4 个算法与 CGP 相比，在计算复杂度方面有优势。下面本文就基于 QR 分解的 OMP、GP、CGP、ACGP、NP 和 VMMGP 的计算复杂度和存储需求进行分析总结。

注意到形如  $\Phi x$  和  $\Phi^T y$  的矩阵向量乘积在本文的算法中计算很频繁，而通过快速傅里叶变换 (FFT) 或者快速小波变换就可以有效地算出这类矩阵向量乘积。所以在下面的讨论中，这些运算的计算消耗不用浮点运算 (flops) 表示，而是特别地用字典向量乘积表示。在下面的讨论中，本文着眼于在选择第  $n$  个元素时，每个算法的计算需求。

所有算法需要计算梯度  $g = \Phi^T r$ ，这要消耗一次字典向量乘积和一次  $|g|$  中最大元素的搜索，这 2 个步骤可在  $N$  次运算内结束。除了矩阵  $\Phi$  的存储，所有的算法还需要存储向量  $r$ 、 $x_\Gamma$ 、 $\Gamma$  和  $g$ ，它们的长度分别为  $M$ 、 $n$ 、 $n$  和  $N$ 。每个算法另外的计算消耗和存储需求总结如表 1 所示。表 1 中的数据是一次迭代每个算法所需的计算消耗和存储需求。其中， $n$  是指这次迭代已选择的原子个数， $\Phi$  是指一个字典的存储空间或者一个字典或者它的转置和一个向量乘积的计算量。所有算法的相同计算消耗和存储需求为方括号中的数据。

表 1 不同算法的计算消耗和存储需求的比较

算法	计算消耗 (flops)	存储需求 (浮点数)
QR OMP	$2Mn + 3M + [\Phi + N]$	$Mn + 0.5n(n+1) + [\Phi + M + 2n + N]$
GP	$\Phi + n + 3M + [\Phi + N]$	$M + [\Phi + M + 2n + N]$
CGP	$2Mn + 3M + [\Phi + N]$	$Mn + 0.5n(n+1) + [\Phi + M + 2n + N]$
ACGP	$2\Phi + 2n + 4M + [\Phi + N]$	$M + [\Phi + M + 2n + N]$
NP	$\Phi + 2n + 3M + [\Phi + N]$	$M + [\Phi + M + 2n + N]$
VMMGP	$\Phi + 3n + 3M + [\Phi + N]$	$M + n^2 + [\Phi + M + 2n + N]$

## 5 实验与分析

本文针对所提及的 7 个算法：OMP、基于 QR 分解的 OMP、GP、CGP、ACGP、NP 和 VMMGP 分别对一维信号和二维信号进行重构，比较这几种算法在

重构时间、均方误差以及峰值信噪比方面的优劣情况。

### 5.1 一维信号的重构

选取一个长度为 256 的一维语音信号，采样频率为 800 Hz，用快速傅里叶变换将其进行稀疏化，

稀疏度设定为 8。选用一个 64 行 256 列的高斯随机矩阵作为测量矩阵，此时的采样率为 0.25，用上述 7 个算法分别对这个语音信号进行重构，利用 Matlab 编程，各个算法的重构结果如图 1 所示，重

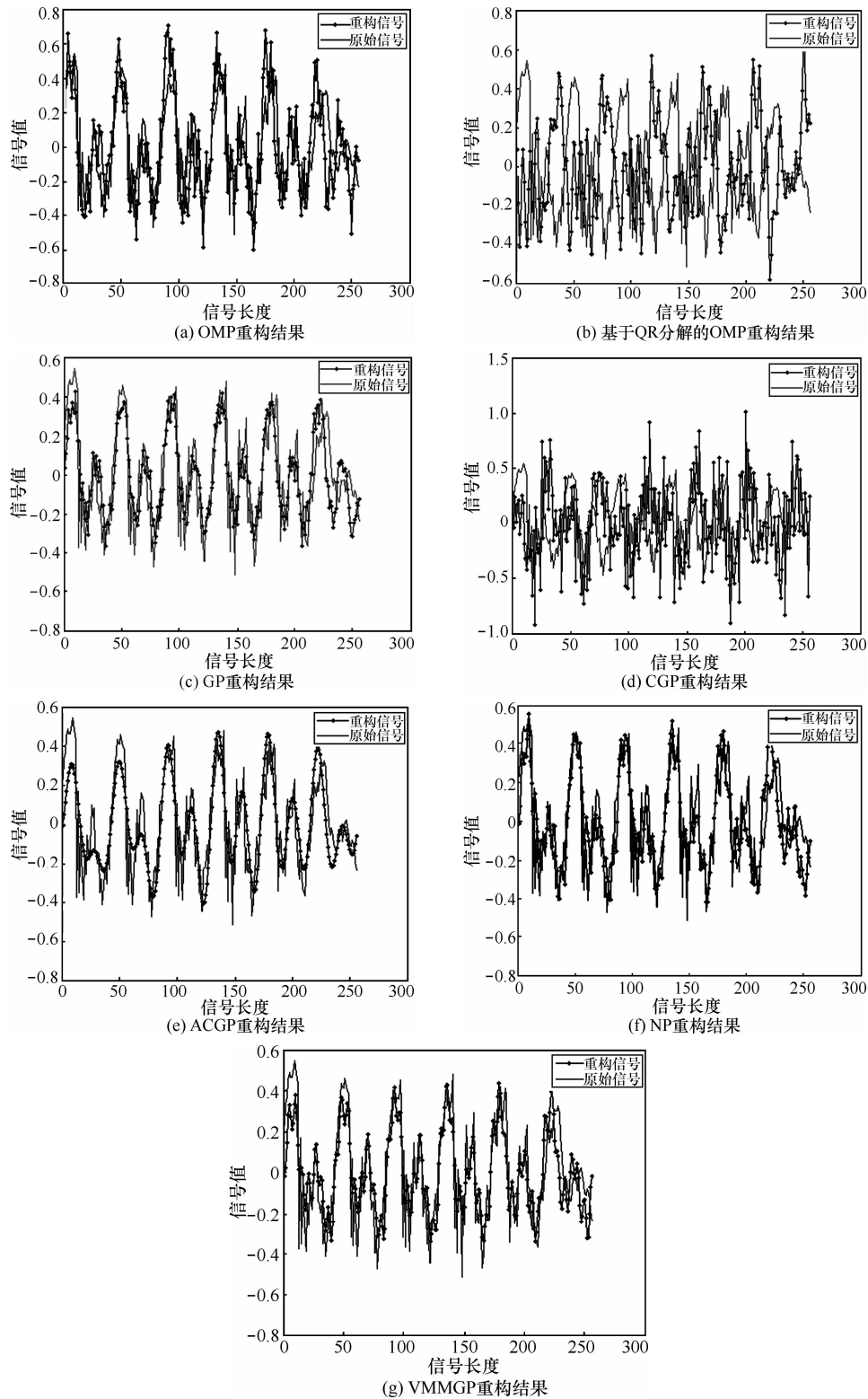


图 1 各个算法对一维信号的重构结果

构时间、均方误差和信噪比的数据结果如表 2 所示。

表 2 各个算法的重构时间、均方误差、信噪比

算法	时间/s	均方误差	信噪比/dB
OMP	0.151 5	10.814 8	37.824 6
QR OMP	0.081 3	10.016 1	38.395 8
GP	0.030 0	5.971 4	40.404 0
CGP	0.081 0	10.279 6	38.067 2
ACGP	0.057 9	5.711 6	40.597 2
NP	0.036 8	6.510 2	40.028 9
VMMGP	0.040 1	5.389 5	40.849 3

综合图 1 和表 2, 从重构时间来看, OMP 的重构时间最长, 基于 QR 分解的 OMP 作为一种 OMP 的优化算法, 有效地减少了 OMP 的重构时间, 而对于本文所涉及的所有梯度追踪算法在重构时间方面都优于 OMP 和基于 QR 分解的 OMP 算法, 其中 GP 的重构时间最短, 其次是 NP、VMMGP、ACG、CGP 的重构时间最长。这是由于 GP 和 NP 都选择了较简单的梯度方向, 它们的计算仅仅需要消耗较少的计算时间, 而 VMMGP、ACGP 以及 CGP 所选择的梯度方向较为复杂, 所以重构时间会稍长一点, 但由于变尺度法比共轭梯度法更加灵活, 使得 VMMGP 算法在重构时间少于 ACGP 和 CGP。

从均方误差以及信噪比看, 由于信噪比越大, 均方误差越小, 二者成反比, 这二者也是衡量重构算法重构结果好坏最直观的数据结果, 由此可以看出, 本文所涉及的所有梯度追踪算法的重构效果都比 OMP 好, 并且除了 CGP, 其他所有梯度追踪算法的重构效果均优于基于 QR 分解的 OMP 算法, 特别是本文提出的新算法 VMMGP, 它重构效果是最好的, 其次是 ACGP、GP、NP。

由此可见, 对于本文所涉及的梯度追踪算法, 对于一维信号的重构, 无论在重构时间还是 MSE、PNSR 方面都优于 OMP 算法。

## 5.2 二维信号的重构

本节选用经典图像“Lena”作为二维信号, 为了避免一次性重构整幅图像计算量大的问题, 本文

采用分块的思想, 将图像从上到下从左到右, 按照像素特征依次分块为  $8 \times 8$  的小块, 之后就对每一小块利用离散余弦变换 (DCT) 进行稀疏化, 稀疏度仍然设定为 8, 选用一个 32 行 64 列的高斯随机矩阵作为测量矩阵, 此时的采样率为 0.5, 每一小块重构完之后再拼接成整幅图像, 就可以得到最后的重构图像。用上述 7 个算法分别对“Lena”图像进行重构, 利用 Matlab 编程, 各个算法的重构结果如图 2 所示, 重构时间、均方误差和峰值信噪比的数据结果如表 3 所示。

表 3 各个算法的重构时间、均方误差、峰值信噪比

算法	时间/s	均方误差	峰值信噪比/dB
OMP	5.149 7	$9.015 4 \times 10^6$	26.745 7
QR OMP	4.867 5	$8.443 5 \times 10^6$	27.024 9
GP	4.291 8	$8.715 2 \times 10^6$	26.892 8
CGP	4.867 1	$8.981 3 \times 10^7$	26.808 8
ACGP	4.537 6	$8.499 2 \times 10^6$	27.001 8
NP	4.518 0	$8.459 7 \times 10^6$	27.022 1
VMMGP	4.528 6	$8.433 9 \times 10^6$	27.035 3

综合图 2 和表 3, 从重构时间来看, OMP 的重构时间最长, 基于 QR 分解的 OMP 的重构时间仍然少于 OMP, 而梯度追踪算法 GP、CGP、ACGP、NP 以及 VMMGP 在重构时间方面都优于 OMP 和基于 QR 分解的 OMP 算法, 其中 GP 的重构时间最短, 其次是 NP、VMMGP、ACG, CGP 的重构时间最长。

从均方误差以及峰值信噪比看, 本文所涉及的所有梯度追踪算法的重构效果均好于 OMP, 尤其是本文提出的新算法 VMMGP, 它的重构效果是最好的, 也是唯一一个重构效果优于基于 QR 分解的 OMP 的算法, 其次是 NP、ACGP。

由此可见, 对于本文所涉及的所有梯度追踪算法, 对于二维信号的重构, 无论在重构时间还是 MSE、PNSR 方面都优于 OMP 算法。

## 5.3 结果分析

通过各种梯度追踪算法对一维、二维信号的重构效果的分析, 发现本文提出的 VMMGP 算法确实优于其他算法, 这是由于变尺度法既克服了牛顿法的缺点<sup>[17]</sup>, 又具有最速下降法的下降性<sup>[17]</sup>和共轭梯



图 2 各个算法对二维图像的重构结果

度法的共轭性<sup>[17]</sup>和二次终止性<sup>[17]</sup>，这样变尺度法的收敛性就更高，从而本文提出的 VMMGP 算法重构效果就更好。对于重构时间，在计算复杂度和存储需求的分析中，可以明显看出 VMMGP 的重构时间要多于 GP 和 NP，这是由于 GP 和 NP 的更新方向的计算都很简单，而和 CGP、ACGP 相比，VMMGP 的重构时间就存在一定的优势，这是由于 VMMGP 更新方向的计算复杂度要低于 CGP 和 ACGP。

## 6 结束语

由于贪婪类算法对于大规模数据的重构问题有着计算复杂度高、存储量大的缺点，本文将最优化方法中的梯度法与贪婪算法相结合，首先介绍了已有的算法，例如 GP、CGP、ACGP、NP，并在此基础上提出了基于变尺度法的梯度追踪算法 VMMGP，同时本文引入了基于 QR 分解的 OMP 算法，分析比较了这些算法的计算复杂度和存储需求，并用这些算法分别重构一维信号和二维信号，比较算法重构效果好坏。实验结果表明，GP、CGP、ACGP、NP、VMMGP 等梯度追踪算法，对于一维信号和二维信号的重构，无论在重构时间还是重构效果方面，均优于 OMP 算法，尤其是本文提出的 VMMGP 算法，重构效果是所有梯度追踪算法中最好的，并且重构时间优于 ACGP 和 CGP。

## 参考文献：

[1] GOYAL V K, VETTERLI M, THAO N T. Quantized overcomplete

- expansions in  $R^n$ : Analysis, synthesis and algorithms[J]. IEEE Trans Inf Theory, 1998,44(1):16-31.
- [2] FEVOTTE C, GODSILL S. Sparse linear regression in unions of bases via Bayesian variable selection[J]. IEEE Signal Process Lett, 2006,13(7):441-444.
- [3] DAVIES M, MITIANOUDIS N. A simple mixture model for sparse overcomplete ICA[A]. Proc Inst Elect Eng, Vis, Image Signal Processing[C]. 2004.35-43.
- [4] CANDÈS E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2006, 52(2):489-509.
- [5] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM J of Scientific Computing, 1998,20(1): 33-61.
- [6] FIGUEIREDO M, NOWAK R, WRIGHT S. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE J of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 12(4):586-597.
- [7] DAUBECHIES I, DEFRISE M, DEMOL C. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint[J]. Comm Pure Appl Math, 2004, 57:1413-1457.
- [8] BLUMENSATH T, DAVIES M. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2009, 27(3):265-274.
- [9] MALLAT S, ZHANG Z. Matching pursuit in a time-frequency dictionary[J]. IEEE Trans SP, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [10] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [11] DONOHO D L, DRORI I, TSAIG Y. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans Inf Theory, 2012, 58(2):1094-112.
- [12] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Signal recovery from inaccurate and incomplete measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Found Comput Math, 2009, 9(3): 317-334.
- [13] NEEDELL D, TROPP J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Appl Comp Harm Anal, 2009, 26:309-321.

Sin, 2012, 61(21):1-8.

- [13] 张健雄, 唐万生, 徐勇. 一个新的三维混沌系统[J]. 物理学报, 2008, 57(11):6799-6807.

ZHANG J X, TANG W S, XU Y. A new three-dimensional chaotic system[J]. Acta Phys Sin, 2008, 57(11):6799-6807.

- [14] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(8):821-824.

- [15] 王兴元, 段朝锋. 基于线性状态观测器的混沌同步及其在保密通信中的应用[J]. 通信学报, 2005, 26(6):105-111.

WANG X Y, DUAN C F. Observer based chaos synchronization and its application to secure communication[J]. Journal on Communications, 2005, 26(6):105-111.

- [16] 黄丽莲, 齐雪. 基于自适应滑模控制的不同维分数阶混沌系统的同步[J]. 物理学报, 2013, 62(8):1-7.

HUANG L L, QI X. The synchronization of fractional order chaotic systems with different orders based on adaptive sliding mode control[J]. Acta Phys Sin, 2013, 62(8):1-7.



徐勇 (1971-), 男, 山东蒙阴人, 河北工业大学副教授, 主要研究方向为复杂系统、图论。



刘建平 (1980-), 男, 河北滦南人, 河北科技师范学院讲师, 主要研究方向为混沌系统在保密通信中的应用、认知网。

#### 作者简介:



毛学志 (1969-), 男, 河北卢龙人, 河北科技师范学院副教授, 主要研究方向为混沌系统、swarm 系统等。



马会泉 (1971-), 男, 河北秦皇岛人, 河北科技师范学院讲师, 主要研究方向为基础数学、应用数学。

(上接第 105 页)

- [14] DAI W, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2009, 55(5):2230-2249.

- [15] BLUMENSATH T, DAVIES M. Gradient pursuits[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2008, 56(6):2370-2382.

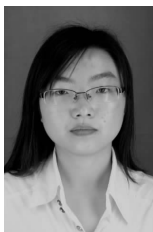
- [16] ZHU L, QIU C T. Newton pursuit algorithm for sparse signal reconstruction in compressed sensing[J]. IEEE Computer Science and Information Technology, 2010, 6:463-466.

- [17] YUAN Y X, SUN W Y. Theory and Methods of Optimization[M]. Beijing: Science Press, 1997.



李雷 (1958-), 男, 安徽砀山人, 南京邮电大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为模式识别与智能系统、智能信息处理。

#### 作者简介:



刘盼盼 (1990-), 女, 江苏扬州人, 南京邮电大学硕士生, 主要研究方向为压缩感知理论及其在信号处理中的应用。



王浩宇 (1992-), 男, 山西太原人, 主要研究方向为压缩感知理论及其在信号处理中的应用。