

# 平面极化天线阵列的 DOA 及极化参数降维估计方法

司伟建, 朱瞳, 张梦莹

(哈尔滨工程大学 信息与通信工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 基于极化阵列的长矢量数据模型, 提出了一种适用于平面极化天线阵列的 DOA 和极化参数联合估计的方法。通过利用谱函数的偏导数条件进行降维优化, 从而大大降低在搜索过程中的运算量, 同时保证了分辨能力与估计精度。通过仿真实验可以看出, 所提算法相比于目前较有效的基于四元数的 Q-MUSIC 算法有着更好的分辨力与较小的均方误差, 且减少了运算量。

**关键词:** DOA 估计; 极化敏感天线; 降维 MUSIC 算法; 联合估计

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)12-0028-08

## Dimension-reduction MUSIC for jointly estimating DOA and polarization using plane polarized arrays

SI Wei-jian, ZHU Tong, ZHANG Meng-ying

(School of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** Based on the long-vector data modal of polarization sensitive array, a joint estimation of DOA and polarization information algorithm suitable for plane polarized antenna arrays was proposed. Using the condition of partial derivative of spectral function to reduce the dimensionality, the computation significantly was decreased but also guarantees the resolution and estimation accuracy. Simulation results show that the proposed algorithm has better resolution and lower square mean compared to the effective Quaternion-MUSIC algorithm, and reduces computation of estimation.

**Key words:** DOA estimation; polarization sensitive array; dimension-reduction MUSIC algorithm; joint estimation

### 1 引言

空间电磁波信号对于天线阵列来说, 除了波达方向(DOA, direction of arrival)特征以外, 还同时具有电磁波的极化特性, 它描述了传播空间中任一点处电磁波的电场矢量随时间的变化特征, 即电磁波的一种固有属性。因此如果获得来波信号的 DOA 信息的同时, 也能够获得电磁波的极化信息, 就可以增加对来波信号的信息掌控程度, 从而提高了天线阵列的接收能力, 也优化了信号 DOA 的估计性能。

在以往的阵列信号处理领域中多使用标量天线, 阵列中的每个阵元具有相同的极化方式, 如圆极化的平面螺旋天线, 因而不能获得电磁波的

极化信息。因此近年来对极化信息敏感的矢量天线受到相关领域学者的广泛关注<sup>[1~5]</sup>, 如基于电磁矢量传感器阵列的多重信号分类算法(MUSIC, multiple signal classification)<sup>[6,7]</sup>以及旋转不变子空间算法(ESPRIT, estimation of signal parameters via rotational invariance techniques)<sup>[8,9]</sup>等。文献[10~12]研究了基于电磁矢量传感器阵列的长矢量(LV, long vector)数据模型 DOA 估计方法, 但当极化参数未知时, LV 数据模型的高维搜索运算量巨大, 很难在工程应用中实现。文献[13~16]采用基于四元数的阵列信号处理技术对 DOA 和极化参数联合估计, 利用了四元数在运算量上的优势降低了算法的运算次数, 但同时由于减少了矩阵维数, 因此在分辨能力上相比于 LV 数据模型有

收稿日期: 2013-07-10; 修回日期: 2014-05-20

基金项目: 中央高校基本科研业务基金资助项目 (HEUCF130804)

Foundation Item: The Fundamental Research Funds for the Central Universities (HEUCF130804)

所降低。

基于传统的 LV 数据模型提出了适用于平面极化天线阵列的降维 MUSIC 算法(DL-MUSIC, dimension-reduction long vector MUSIC)。针对高维搜索运算量巨大的问题,对谱函数进行降维优化,优先估计来波信号的 DOA 参数信息,而后通过估计出的 DOA 参数直接计算得出极化参数,因此相比于基于四元数的联合估计方法,在运算量上进一步降低。同时由于保留了协方差矩阵的维数,也保留了 LV 数据模型在分辨性能上的优越性。通过运算量分析及仿真实验,可以验证本文方法的有效性。

曲折臂天线在单一口径中包含有 2 个正交极化天线,通常情况下,能够同时接收空间中的水平极化和垂直极化信号,当添加了合适的硬件时,可以接收左旋和右旋极化的信号,典型的四曲折臂单元布局如图 1 所示。因此,曲折臂天线是全极化的,并且可以同时接收 2 路正交极化的信号,同时,天线具有很宽的频带能力(如 2~18 GHz),且天线口径与平面螺旋天线相仿,在工程应用中便于替换使用,因此本文的双极化天线阵列以曲折臂天线阵列为例,但并不失一般性。



图 1 典型的四曲折臂单元布局

## 2 数学模型

假设入射信号为在各向同性均匀介质中传播的  $q$  个远场均匀横电磁波,其中,第  $i(i=1,2,\dots,q)$  个信号入射到  $M$  阵元的平面曲折臂天线阵列原点如图 2 所示。信号入射方向为  $\vec{e}_i$  矢量方向,入射方位角与俯仰角分别为  $\theta_i, \varphi_i$ 。

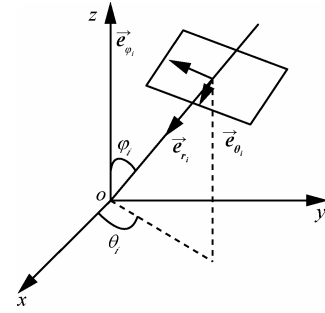


图 2 空间入射信号

来波信号的电场矢量  $\vec{E}_i$  在两正交单位矢量  $\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$  的方向上分解如图 3 所示<sup>[6]</sup>。

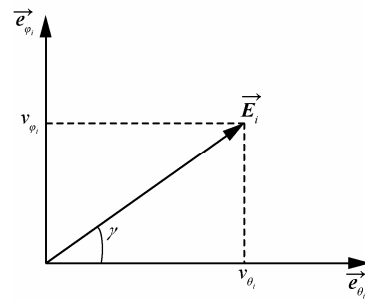


图 3 电场矢量  $\vec{E}_i$  的正交分量

当来波信号为完全极化波时,电场矢量  $\vec{E}_i$  可以表示为

$$\vec{E}_i = E_{0i}(\cos \gamma_i \vec{e}_\theta + \sin \gamma_i e^{j\eta_i} \vec{e}_\varphi) \quad (1)$$

其中,  $|E_{0i}|^2 = |v_\theta|^2 + |v_\varphi|^2$  为电波功率,  $\gamma_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$  为信号的极化幅角,  $\eta_i \in [0, 2\pi]$  为信号的极化相位差,且有

$$\tan \gamma_i = |v_\varphi| / |v_\theta| \quad (2)$$

$$\eta_i = \arg(v_\varphi) - \arg(v_\theta) \quad (3)$$

在空间直角坐标系  $o-xyz$  中,式(1)中电场矢量  $\vec{E}_i$  可以分解为

$$\begin{aligned} \vec{E}_i = & E_{0i}(-\cos \theta_i \cos \varphi_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} + \sin \theta_i \cos \gamma_i) \vec{e}_x + \\ & E_{0i}(-\sin \theta_i \cos \varphi_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} - \cos \theta_i \cos \gamma_i) \vec{e}_y + \\ & E_{0i}(\sin \varphi_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i}) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4)$$

将矢量写成矩阵的形式有<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{E}_i = E_{0i} \begin{bmatrix} -\cos \theta_i \cos \varphi_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} + \sin \theta_i \cos \gamma_i \\ -\sin \theta_i \cos \varphi_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} - \cos \theta_i \cos \gamma_i \\ \sin \varphi_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} \end{bmatrix} \quad (5)$$

对于单一曲折臂天线阵元来说,口径中包含有 2 个正交极化天线,因此可以同时接收水平极化和垂直极化信号。设两正交天线相对于坐标系  $o-xyz$  的有效长度分别为  $\mathbf{h}_1$ 、 $\mathbf{h}_2$ , 考虑到阵元处在  $xoy$  平面,  $\mathbf{h}_1$ 、 $\mathbf{h}_2$  的  $z$  轴方向分量不起作用, 若令

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -\cos\theta_i \cos\varphi_i \sin\gamma_i e^{j\eta_i} + \sin\theta_i \cos\gamma_i \\ -\sin\theta_i \cos\varphi_i \sin\gamma_i e^{j\eta_i} - \cos\theta_i \cos\gamma_i \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_{1i} \\ \xi_{2i} \end{bmatrix} \quad (6)$$

因此 2 个正交天线对第  $i$  个信号的接收电压为

$$V_{1i} = \mathbf{h}_1^T \mathbf{E}_i = E_{0i} \mathbf{h}_1^T(x, y) \xi_i \quad (7)$$

$$V_{2i} = \mathbf{h}_2^T \mathbf{E}_i = E_{0i} \mathbf{h}_2^T(x, y) \xi_i \quad (8)$$

若将第 1 个阵元设定为参考阵元, 则第  $m(m=1, 2, \dots, M)$  个天线阵元所接收到的时域信号为

$$x_{1m}(t) = \sum_{i=1}^q V_{1i} s_i(t) e^{-j\phi_{mi}} + n_{1m}(t) \quad (9)$$

$$x_{2m}(t) = \sum_{i=1}^q V_{2i} s_i(t) e^{-j\phi_{mi}} + n_{2m}(t) \quad (10)$$

其中,  $s_i(t)$  为第  $i$  个信号波形,  $n_{1m}(t), n_{2m}(t)$  为第  $m$  阵元 2 正交天线的加性噪声,  $\phi_{mi}$  是第  $m$  个阵元相对于参考点的滞后相位。通常以天线阵列坐标系的原点作为参考点, 阵元在坐标系平面可以任意摆放, 设第  $m$  阵元的位置坐标是  $(x_m, y_m)$ , 则对于入射角度为  $(\theta_i, \varphi_i)$  的第  $i$  个信号其滞后相位  $\phi_{mi}$  为

$$\phi_{mi} = \frac{2\pi}{\lambda} (x_m \cos\theta_i \cos\varphi_i + y_m \sin\theta_i \cos\varphi_i) \quad (11)$$

其中,  $\lambda$  为信号波长。若令  $\mathbf{X}_1(t) = [x_{11}(t) \ x_{12}(t) \ \dots \ x_{1M}(t)]^T$ ,  $\mathbf{X}_2(t) = [x_{21}(t) \ x_{22}(t) \ \dots \ x_{2M}(t)]^T$ , 则天线阵列输出模型可以写为

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) \\ \mathbf{X}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}V_1 \\ \mathbf{A}V_2 \end{bmatrix} \mathbf{S}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(t) \\ \mathbf{N}_2(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_q]$  是曲折臂天线阵列的空域导向矢量矩阵,  $\mathbf{a}_i = [e^{-j\theta_i} \ e^{-j\varphi_i} \ \dots \ e^{-j\phi_{Mi}}]^T$  第  $i$  个信号的导向矢量;  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_q(t)]^T$  是信号矢量;  $\mathbf{N}_k(t) = [n_{k1}(t) \ n_{k2}(t) \ \dots \ n_{kM}(t)]^T (k=1, 2)$  是加性噪声矢量;  $\mathbf{V}_k = \text{diag}(V_{k1}, V_{k2}, \dots, V_{kq}) (k=1, 2)$  是接收电压  $V_{ki}$  构成的对角阵。假设信号与噪声相互独立,  $q$  个信号之间也互不相关, 加性噪声为高斯白

噪声, 噪声功率为  $\sigma_n^2$ , 则观测数据协方差矩阵为

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^H] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}V_1 \\ \mathbf{A}V_2 \end{bmatrix} \mathbf{R}_S \begin{bmatrix} \mathbf{A}V_1 \\ \mathbf{A}V_2 \end{bmatrix}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{2M} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{R}_S = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^H]$  是信号的协方差矩阵。

### 3 降维长矢量 MUSIC 算法

将协方差矩阵  $\mathbf{R}$  进行特征分解, 可以得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{U}_n^H \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{U}_S$ 、 $\mathbf{U}_n$  分别为信号子空间与噪声子空间,  $\mathbf{\Sigma}_S$ 、 $\mathbf{\Sigma}_n$  为其对应的特征值所构成的对角阵。根据 MUSIC 算法原理, 噪声子空间  $\mathbf{U}_n$  与阵列流型矩阵

所张成的空间  $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{A}V_1 \\ \mathbf{A}V_2 \end{bmatrix}\right\}$  正交, 即满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}V_1 \\ \mathbf{A}V_2 \end{bmatrix}^H \mathbf{U}_n = \mathbf{V}_1^H \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}V_2V_1^{-1} \end{bmatrix}^H \mathbf{U}_n = 0 \quad (15)$$

所以有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}V_2V_1^{-1} \end{bmatrix}^H \mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_q \\ \frac{\mathbf{h}_2^T \xi_1}{\mathbf{h}_1^T \xi_1} \mathbf{a}_1 & \frac{\mathbf{h}_2^T \xi_2}{\mathbf{h}_1^T \xi_2} \mathbf{a}_1 & \dots & \frac{\mathbf{h}_2^T \xi_q}{\mathbf{h}_1^T \xi_q} \mathbf{a}_1 \end{bmatrix}^H \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n1} \\ \mathbf{U}_{n2} \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

由于实际中并不能完全得到阵列数据的协方差矩阵, 只能通过有限的观测数据样本近似得到, 导致阵列流型矩阵与噪声子空间并不完全正交, 因此可以通过参数搜索使构造的谱函数  $f(\theta, \varphi, \gamma, \eta)$  达到极小值, 从而得到待估计的角度。若令

$$\rho_i e^{j\delta_i} = \frac{\mathbf{h}_2^T \xi_i}{\mathbf{h}_1^T \xi_i} \quad (17)$$

则谱函数  $f(\theta, \varphi, \gamma, \eta)$  可以构造为

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi, \gamma, \eta) &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{a}^H & \rho e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n1} \\ \mathbf{U}_{n2} \end{bmatrix} \right\|_F^2 \\ &= \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a} + \rho e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{a} + \\ &\quad \rho e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n1} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a} + \rho^2 \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{a} \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $\|\cdot\|_F$  表示矩阵的 Frobenius 范数。注意到矢量  $\mathbf{a}$  是参数  $(\theta, \varphi)$  的函数, 而变量  $\rho, \delta$  是参数

$(\theta, \varphi, \gamma, \eta)$  的函数, 因此通常需要进行四维搜索, 运算量很大。为了降低运算量可以首先进行参数的降维, 令谱函数  $f(\theta, \varphi, \gamma, \eta)$  分别对参数  $(\gamma, \eta)$  求偏导并令其为零, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \gamma} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} + \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \gamma} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

可以证明下式成立 (证明过程见附录 A)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} = e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} + e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} + 2\rho \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \delta} = -j\rho e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} + j\rho e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} = 0 \end{cases} \quad (20)$$

通过联立方程可以得出等式关系

$$e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} = e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} = -\rho \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} \quad (21)$$

将式(21)代入式(18), 可以将谱函数化简为

$$f(\theta, \varphi, \rho) = \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} - \rho^2 \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} \quad (22)$$

同时, 根据式(21)可知  $e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a}$  为实数,

所以有

$$e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} = \sqrt{|\mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a}|^2} \quad (23)$$

从而可得出  $\rho$  为

$$\rho = -\frac{\sqrt{|\mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a}|^2}}{\mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a}} \quad (24)$$

代入式(22)中, 可进一步将谱函数化简为

$$f(\theta, \varphi) = \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} - \frac{|\mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a}} \quad (25)$$

此时谱函数已经降维至常规的二元函数, 可以通过对二维参数  $(\theta, \varphi)$  进行搜索求得极值, 从而得到  $q$  个信号的来波方向。为了便于比较通常取其倒数, 即

$$P_{\text{DL-MUSIC}} = \frac{1}{f(\theta, \varphi)} \quad (26)$$

#### 4 极化参数的求取

当通过二维搜索获得  $q$  个信号的来波方向参数  $(\hat{\theta}_i, \hat{\varphi}_i)$  后, 可以进一步计算来分别得到对应信号的

极化参数  $(\hat{\gamma}_i, \hat{\eta}_i)$ 。根据式(17)定义以及式(23)、式(24)联立可以得到

$$\rho_i e^{j\delta_i} = -\frac{|\tilde{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \tilde{\mathbf{a}}_i|^2}{\tilde{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_2}^H \tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_1}^H \tilde{\mathbf{a}}_i} = \frac{\mathbf{h}_2^T \boldsymbol{\xi}_i}{\mathbf{h}_1^T \boldsymbol{\xi}_i} \quad (27)$$

$\tilde{\mathbf{a}}_i$  为估计参数  $(\hat{\theta}_i, \hat{\varphi}_i)$  构建的导向矢量, 若假设曲折臂天线阵列的坐标系与参考坐标系重合, 即天线极化矢量满足  $\mathbf{h}_1 = [1 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{h}_2 = [0 \ 1]^T$ , 并令

$$k = -\frac{|\tilde{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \tilde{\mathbf{a}}_i|^2}{\tilde{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_2}^H \tilde{\mathbf{a}}_i \tilde{\mathbf{a}}_i^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_1}^H \tilde{\mathbf{a}}_i} \quad (28)$$

则代入式(27), 有

$$\frac{-\sin \hat{\theta}_i \cos \hat{\varphi}_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} - \cos \hat{\theta}_i \cos \gamma_i}{-\cos \hat{\theta}_i \cos \hat{\varphi}_i \sin \gamma_i e^{j\eta_i} + \sin \hat{\theta}_i \cos \gamma_i} = k \quad (29)$$

整理后可得

$$\tan(\gamma_i) e^{j\eta_i} = \frac{\cos \hat{\theta}_i + k \sin \hat{\theta}_i}{-\sin \hat{\theta}_i \cos \varphi_i + k \cos \hat{\theta}_i \cos \varphi_i} \quad (30)$$

因此, 可以得到估计的第  $i$  个信号的极化参数

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_i = \arctan \left( \frac{\cos \hat{\theta}_i + k \sin \hat{\theta}_i}{-\sin \hat{\theta}_i \cos \varphi_i + k \cos \hat{\theta}_i \cos \varphi_i} \right) \\ \hat{\eta}_i = \text{angle} \left( \frac{\cos \hat{\theta}_i + k \sin \hat{\theta}_i}{-\sin \hat{\theta}_i \cos \varphi_i + k \cos \hat{\theta}_i \cos \varphi_i} \right) \end{cases} \quad (31)$$

#### 5 运算量分析

在实际工程应用中, 一个算法的运算量大小直接影响到整个信号处理系统的实时性能, 因此在此对本文算法(DL-MUSIC)与经典长矢量 MUSIC 算法(LV-MUSIC)以及四元数 MUSIC 算法(Quaternion-based MUSIC, Q-MUSIC)的运算量进行比较。MUSIC 类算法的运算量主要体现在协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的求取以及谱函数的极值搜索过程, 而搜索过程又分为 DOA 参数  $(\theta, \varphi)$  和极化参数  $(\gamma, \eta)$  的搜索, 故可以分别从这 3 方面作对比。

##### 1) 协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 的计算量

由于在实际应用中, 协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的理论值很难直接得到, 通常是通过一定的观测序列数据来计算出协方差矩阵的近似估计值  $\hat{\mathbf{R}}$ , 根据最大似然原理有

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^H \quad (32)$$

其中,  $l$  是采样快拍数。对于 LV-MUSIC 算法, 观测矩阵  $\mathbf{X}$  为  $2M \times l$  维, 每一个快拍数据产生的运算量约为  $4M^2$  次复数乘法 (每次复数乘法相当于 4 次乘法运算和 2 次加法运算); 对于 Q-MUSIC 算法, 为了计算四元数矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  的特征值与特征向量, 需要构建  $\hat{\mathbf{R}}^\sigma$  的导出矩阵  $\hat{\mathbf{R}}^\sigma$

$$\hat{\mathbf{R}}^\sigma = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_1 & \mathbf{R}_2 \\ -\hat{\mathbf{R}}_2^* & -\mathbf{R}_1^* \end{bmatrix} \quad (33)$$

其中, 复数矩阵  $\hat{\mathbf{R}}_1$ 、 $\hat{\mathbf{R}}_2$  满足  $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}_1 + i\hat{\mathbf{R}}_2$ , 且每个复数矩阵的运算量为  $2M^2$  次复数乘法, 因此 Q-MUSIC 算法计算协方差矩阵时运算量也为  $4M^2$  次复数乘法; 对于 DL-MUSIC 算法。观测矩阵  $\mathbf{X}$  与 LV-MUSIC 相同, 即同样需要  $4M^2$  次复数乘法。

### 2) DOA 参数 $(\theta, \varphi)$ 搜索的计算量

在固定搜索步长后, 对于每一搜索节点来说, LV-MUSIC 算法需要计算谱函数  $\|\mathbf{a}^H(\theta, \varphi, \gamma, \eta)U_N\|^2$ , 其计算量为  $2M(2M-q)$  次复数乘法和  $(2M-q)$  次复数求模 (每次复数求模相当于 2 次乘法运算和 1 次加法运算); Q-MUSIC 算法需要计算谱函数  $\|\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)U_N\|^2$ , 其中,  $U_N$  为四元数矩阵, 其计算量为  $2M(M-q)$  次复数乘法和  $2(M-q)$  次复数求模; DL-MUSIC 算法需要计算谱函数如式(25), 其计算量为  $(2M+1)(M-q)$  次复数乘法和  $2(M-q)$  次复数求模。

### 3) 极化参数 $(\gamma, \eta)$ 搜索的计算量

对 LV-MUSIC 算法来说, 由于采用的是四维搜索模式, 因此在每一搜索节点参数  $(\gamma, \eta)$  与参数  $(\theta, \varphi)$  是共用计算量的; Q-MUSIC 算法则无法直接得到参数  $(\gamma, \eta)$ , 一般需要在搜索得到 DOA 参数  $(\theta, \varphi)$  后, 二次搜索得到参数  $(\gamma, \eta)$ , 其每搜索节点运算量与 LV-MUSIC 算法相同, 即为  $2M(M-q)$  次复数乘法和  $2(M-q)$  次复数求模; 对 DL-MUSIC 算法来说, 极化参数  $(\gamma, \eta)$  不需要通过搜索得到, 而是直接通过式(31)给出, 即每

搜索节点运算量相当于零。

综上, 3 种算法的运算量可归纳为表 1。

通过表 1 可以清楚地看到, 3 种算法在构造协方差矩阵时的运算量是相同的, 同时由于特征分解时矩阵的维数相同, 所以在后续特征分解过程中的运算量也几乎相同。而搜索部分表 1 中只给出了单位搜索节点的运算量。对于总运算量来说, LV-MUSIC 算法由于进行的是四维搜索, 其待搜索节点总个数远远大于其他 2 种算法, 因此其总运算量巨大, 往往在实际工程应用中难以实现。DL-MUSIC 算法与 Q-MUSIC 算法相比, 在只估计 DOA 参数  $(\theta, \varphi)$  时, 两算法总运算量几乎相同, Q-MUSIC 算法要稍小一些; 在联合估计极化参数  $(\gamma, \eta)$  时, 由于 DL-MUSIC 算法不再需要搜索过程, 此时总运算量要远小于 Q-MUSIC 算法。

## 6 仿真

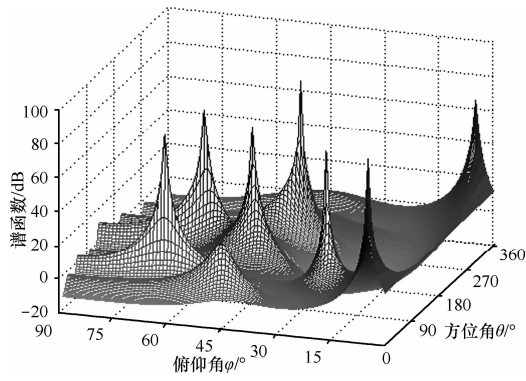
为了验证本文算法的估计性能, 本文将基于四元数的 Q-MUSIC 算法与本文 DL-MUSIC 算法进行估计效果对比。考虑由 5 个曲折臂天线组成的平面均匀圆形阵列, 坐标系原点位于阵列圆心处, 极化矢量为  $\mathbf{h}_1 = [1 \ 0]^T$ 、 $\mathbf{h}_2 = [1 \ 0]^T$ , 圆半径为 0.8 倍波长, 采样快拍数  $l$  设置为 300。假设入射信号均为远场的窄带 TEM 波, 且信源之间相互独立。

**实验 1** 对 2 种算法的 DOA 分辨性能进行对比测试。假设两远场信号入射到平面天线阵列的 DOA 参数  $(\theta, \varphi)$  分别为  $(45^\circ, 12^\circ)$ 、 $(50^\circ, 10^\circ)$ , 极化参数  $(\gamma, \eta)$  分别为  $(60^\circ, 50^\circ)$ 、 $(40^\circ, 60^\circ)$ , 设信号信噪比为 20 dB。图 4、图 5 分别为 DL-MUSIC 算法与 Q-MUSIC 算法的 DOA 估计谱函数及俯视图。从图中可以清晰地看出, 此时由于两信源空间角距离相隔较近, Q-MUSIC 算法已经不能正确分辨出两信源位置, 而 DL-MUSIC 仍可以准确地将两信源分辨出来。

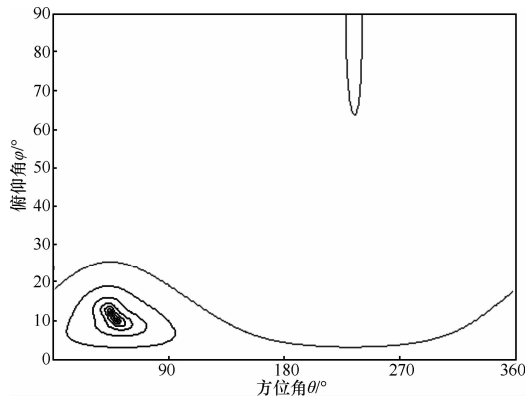
表 1

3 种算法主要运算量对比

算法	协方差矩阵求取 (每快拍数据)	参数 $(\theta, \varphi)$ 搜索 (每搜索节点)	参数 $(\gamma, \eta)$ 搜索 (每搜索节点)
LV-MUSIC	$4M^2$ 次复数乘法	$2M(2M-q)$ 次复数乘法和 $(2M-q)$ 次复数求模	—
Q-MUSIC	$4M^2$ 次复数乘法	$2M(M-q)$ 次复数乘法和 $(2M-q)$ 次复数求模	$2M(2M-q)$ 次复数乘法和 $(2M-q)$ 次复数求模
DL-MUSIC	$4M^2$ 次复数乘法	$(2M+1)(M-q)$ 次复数乘法和 $(2M-q)$ 次复数求模	约等于 0

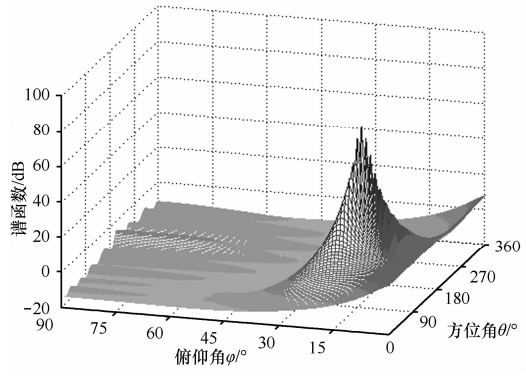


(a) 三维谱峰

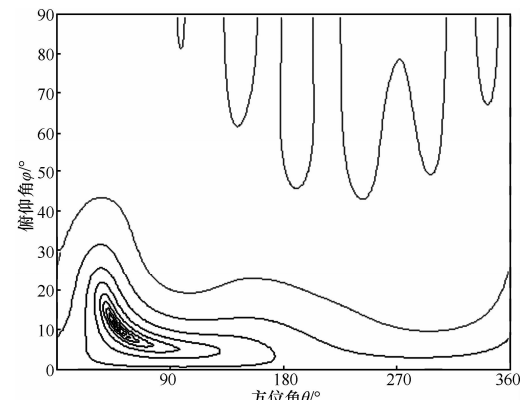


(b) 等值线俯视图

图 4 DL-MUSIC 算法对两信号的 DOA 估计



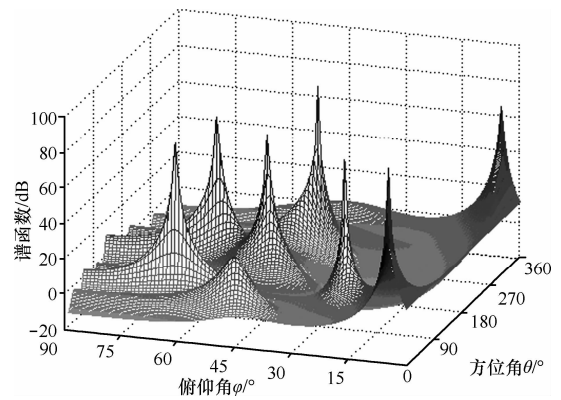
(a) 三维谱峰



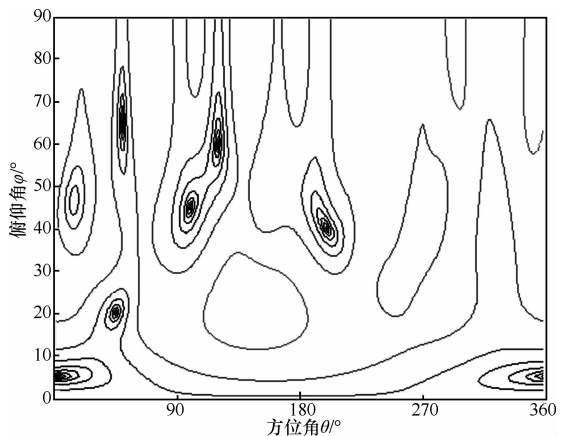
(b) 等值线俯视图

图 5 Q-MUSIC 算法对两信号的 DOA 估计

当入射信源的数目多于天线阵列阵元数时，Q-MUSIC 算法将不能够做出正确估计。这是因为 Q-MUSIC 算法采用的四元数协方差矩阵维数是  $M \times M$ ，当信源数  $q \geq M$  时，即信号协方差矩阵的秩  $\text{rank}(R_s) \geq M$ ，此时已不存在相应的噪声子空间，因此算法不能做出估计。而 DL-MUSIC 算法构造的协方差矩阵维数是  $2M \times 2M$ ，因此当入射信源数满足  $q < 2M$  时理论上都可以做出正确估计。假设空间中有 6 个远场窄带 TEM 波入射到该五元平面天线阵列，入射 DOA 参数  $(\theta, \varphi)$  依次为  $(5^\circ, 5^\circ)$ 、 $(45^\circ, 20^\circ)$ 、 $(50^\circ, 65^\circ)$ 、 $(100^\circ, 45^\circ)$ 、 $(120^\circ, 60^\circ)$ 、 $(200^\circ, 40^\circ)$ ，极化参数  $(\gamma, \eta)$  设置为  $(60^\circ, 50^\circ)$ 、 $(40^\circ, 60^\circ)$ 、 $(30^\circ, 20^\circ)$ 、 $(20^\circ, 10^\circ)$ 、 $(10^\circ, 30^\circ)$ 、 $(70^\circ, 40^\circ)$ ，信噪比为 20 dB，DL-MUSIC 算法的 DOA 估计谱函数及俯视图如图 6 所示。从图中可以清晰地看出 DL-MUSIC 算法能够将 6 个信源成功分辨出来。



(a) 三维谱峰



(b) 等值线俯视图

图 6 DL-MUSIC 算法对 6 信号的 DOA 估计

**实验 2** 对两算法的 DOA 估计精度进行对比测试。定义估计参量  $y$  的均方根误差为

$$RMSE(y) = \sqrt{E[(y - \hat{y})^2]} \approx \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (34)$$

其中,  $L$  为独立估计实验次数。假设 2 个远场窄带信号的入射 DOA 参数  $(\theta, \varphi)$  分别为  $(5^\circ, 35^\circ)$ 、 $(75^\circ, 10^\circ)$ , 极化参数  $(\gamma, \eta)$  分别为  $(60^\circ, 50^\circ)$ 、 $(40^\circ, 60^\circ)$ 。图 7、图 8 分别为 2 种算法对两入射信号的方位角  $\theta$  与俯仰角  $\varphi$  的估计均方根误差随信噪比变化曲线, 其中每个信噪比点进行独立实验 100 次。从图中可以看出, 随着信噪比的增高, 无论是对方位角还是对俯仰角的估计 DL-MUSIC 算法的 RMSE 均要低于 Q-MUSIC 算法。

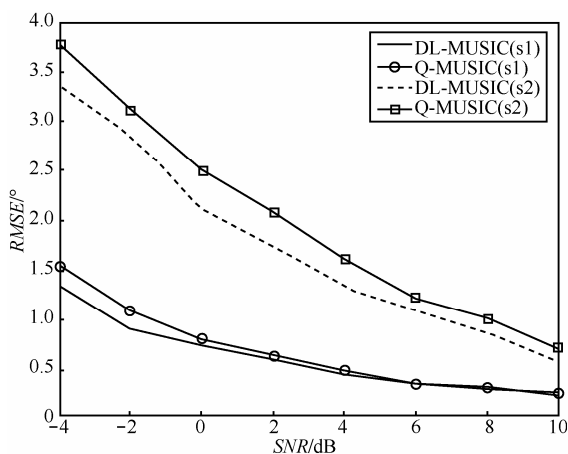


图 7 对两入射信号方位角  $\theta$  估计的 RMSE 随 SNR 变化曲线

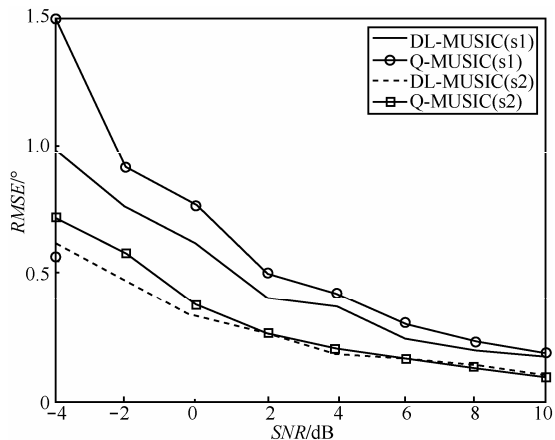


图 8 对两入射信号俯仰角  $\varphi$  估计的 RMSE 随 SNR 变化曲线

**实验 3** 对 2 种算法的极化参数估计精度进行对比测试。对极化参数估计均方根误差定义同式(34), 当 2 种算法分别对 DOA 角度作出正确估计后, Q-MUSIC 继续采用搜索方式对极化参数进行估计, DL-MUSIC 算法则通过式(31)计算出极化参数。假设入射信号参数与实验 2 设置相同, 图 9 和图 10 分别

为 2 种算法对两入射信号极化参数  $(\gamma, \eta)$  的估计均方根误差随信噪比变化曲线, 其中每个信噪比点进行独立实验 100 次。可以看出, 2 种算法对极化参数估计的 RMSE 几乎相同, 即相当于对极化参数有相同的估计精度。但从前文分析可知, Q-MUSIC 算法估计极化参数时所需的计算量远远大于 DL-MUSIC, 即更难满足实时性要求, 且耗费更多硬件资源。

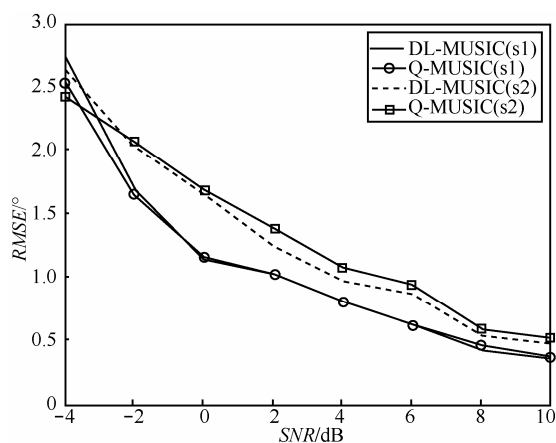


图 9 对两入射信号极化参数  $\gamma$  估计的 RMSE 随 SNR 变化曲线

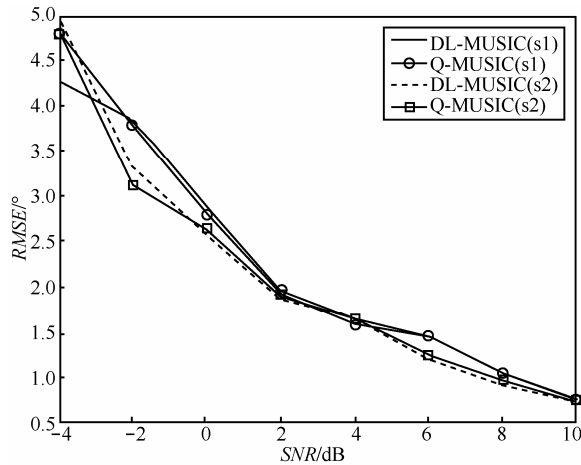


图 10 对两入射信号极化参数  $\eta$  估计的 RMSE 随 SNR 变化曲线

## 7 结束语

本文基于传统的长矢量数据模型, 提出了适用于平面极化天线阵列的 DOA 参数与极化参数的联合估计 MUSIC 算法。该方法可以在 DOA 参数与极化参数均未知的情况下, 对待估计参数的个数进行降维, 优先估计来波信号的 DOA 参数信息, 再利用所估计出的 DOA 参数计算得出相应的极化参数, 由于未减少矩阵的维数, 因此在保证了阵列的分辨性能和精度的基础上, 降低了所需的运算量。

## 附录 A 对式(20)的证明

根据式(17)可知, 中间变量  $\rho, \delta$  是参数  $(\theta, \varphi, \gamma, \eta)$  的函数, 若设

$$\begin{cases} \rho = g_1(\theta, \varphi, \gamma, \eta) \\ \delta = g_2(\theta, \varphi, \gamma, \eta) \end{cases} \quad (35)$$

则可以通过联立解得逆函数

$$\begin{cases} \gamma = g_3(\theta, \varphi, \rho, \delta) \\ \eta = g_4(\theta, \varphi, \rho, \delta) \end{cases} \quad (36)$$

因此, 谱函数  $f(\theta, \varphi, \gamma, \eta)$  可以写为  $f(\theta, \varphi, g_3(\theta, \varphi, \rho, \delta), g_4(\theta, \varphi, \rho, \delta))$ , 通过链式法则可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \rho} \\ \frac{\partial f}{\partial \delta} = \frac{\partial f}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \delta} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \delta} \end{cases} \quad (37)$$

根据式(19)可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0 \end{cases} \quad (38)$$

再由式(18)中谱函数  $f$  的具体形式, 便有

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \rho} = e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} + e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} + 2\rho \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \delta} = -j\rho e^{-j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_2} \mathbf{U}_{n_1}^H \mathbf{a} + j\rho e^{j\delta} \mathbf{a}^H \mathbf{U}_{n_1} \mathbf{U}_{n_2}^H \mathbf{a} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

故式(20)得证。

## 参考文献:

- [1] 庄钊文等. 极化敏感阵列信号处理[M]. 国防工业出版社, 2005: 200-213.  
ZHANG Z W, *et al.* Signal Processing of Polarization Sensitive Array[M]. National Defense Industry Press, 2005: 200-213.
- [2] 徐友根, 刘志文. 极化信号频率、二维到达角和极化参数的同时估计[J]. 信号处理, 2005, 21(4): 359-361.  
XU Y G, LIU Z W. Joint estimation of frequency, 2-D DOA and polarization of polarized signal[J]. Signal Processing, 2005, 21(4): 359-361.
- [3] 张亮, 徐振海, 吴迪军等. 相干源诱偏下极化对相位干涉仪导引头测角影响研究[J]. 电波科学学报, 2012, 27(4): 685-690.  
ZHANG L, XU Z H, WU D J, *et al.* Influences analysis of polarization on phase-interferometer PRS angle measurement with decoy of coherent source[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2012, 27(4): 685-690.
- [4] 王建涛, 张国毅, 侯慧群. 基于相位干涉仪的极化和到达角的联合估计[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(10): 1729-1731.  
WANG J T, ZHANG G Y, HOU H Q. Joint estimation of polarization and arrival angle based on phase interferometer[J]. Systems Engineering and Electronics, 2005, 27(10): 1729-1731.
- [5] 张树银, 郭英, 齐子森等. 锥面共形阵列相干源 DOA 和极化参数的联合估计算法[J]. 宇航学报, 2012, 33(7): 956-963.  
ZHANG S Y, GUO Y, QI Z S, *et al.* DOA and polarization estimation algorithm for coherent signals with conical conformal array[J]. Journal

- of Astronautics, 2012, 33(7): 956-963.
- [6] CHENG Q, HUA Y B. Further study of the pencil-MUSIC algorithm[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1996, 32(1): 284-299.
- [7] SWINDLEHURST A, VIBERG M. Subspace fitting with diversely polarized antenna arrays[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(12): 1687-1694.
- [8] LI J, COMPTON J R T. Two-dimensional angle and polarization estimation using the ESPRIT algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1992, 40(5): 550-555.
- [9] ZOLTOWSKI M D, WONG K T. ESPRIT-based 2-D direction finding with a sparse uniform array of electromagnetic vector sensors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(8): 2195-2204.
- [10] 王群. 基于极化敏感阵列的 DOA 估计算法研究[D]. 吉林大学, 2011.  
WANG Q. Study of Algorithm on DOA Estimation Based on Polarization Sensitive Array[D]. Jilin University, 2011.
- [11] 周欣, 石要武, 郭宏志. 有色噪声背景下多径信号的二维 DOA 和极化参数同时估计算法[J]. 吉林大学学报(工学版), 2009, 39(3): 797-802.  
ZHOU X, SHI Y W, GUO H Z. Algorithm for estimating 2D direction of arrival and polarization of multiple signals in colored noise[J]. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2009, 39(3): 797-802.
- [12] GUO W N, YANG M L, CHEN B X, *et al.* Joint DOA and polarization estimation using MUSIC method in polarimetric MIMO radar[A]. IET International Conference on Radar Systems, Glasgow, Radar[C]. 2012.
- [13] MIRON S, LE B N, MARS J I. Quaternion-MUSIC for vector-sensor array processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(4): 1212-1229.
- [14] GONG X F, LIU Z W, XU Y G. Quad-quaternion MUSIC for DOA estimation using electromagnetic vector sensors[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2008: 1-14.
- [15] 李京书, 陶建武. 信号 DOA 和极化信息联合估计的降维四元数 MUSIC 方法[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(1): 106-111.  
LI J S, TAO J W. The dimension reduction quaternion MUSIC algorithm for jointly estimating DOA and polarization[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2011, 33(1): 106-111.
- [16] 李建峰, 张小飞, 汪飞. 基于四元数的 Root-MUSIC 的双基地 MIMO 雷达中角度估计算法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(2): 300-304.  
LI J F, ZHANG X F, WANG F. Quaternion Root-MUSIC algorithm for angle estimation in bistatic MIMO radar[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2012, 34(2): 300-304.

## 作者简介:



司伟建 (1971-), 男, 北京人, 哈尔滨工程大学研究员、博士生导师, 主要研究方向为宽带系统的信号检测、处理与识别。

朱瞳 (1987-), 男, 黑龙江哈尔滨人, 哈尔滨工程大学博士生, 主要研究方向为宽带系统的信号检测、处理与识别。

张梦莹 (1987-), 女, 黑龙江哈尔滨人, 哈尔滨工程大学硕士生, 主要研究方向为智能信息处理。