

新的II型偶长Z-互补对构造

陈晓玉^{1,2}, 孙连峰^{1,2}, 张杰坤^{1,2}, 李玉博^{1,2}

(1. 燕山大学信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室, 河北 秦皇岛 066004)

摘要: 为丰富 Z-互补对 (ZCP) 的参数形式, 研究了新的 II 型 ZCP 的构造方法。基于迭代法, 实现了 II 型 $(2^{k+2}N, (2^{k+2}-1)N)$ -ZCP 的构造, 当 $N=1$ 时, 可得 Z-最优 II 型 $(2^{k+2}, (2^{k+2}-1))$ -ZCP。进一步, 将迭代法与插值法相结合, 构造了 II 型 $(2^{k+1}N + 2^{k+1}, 2^{k+1}N + 2^{k+1} - \frac{N}{2})$ -ZCP; 当 $N=2$ 时, 可得 Z-最优 II 型 $(3 \times 2^{k+1}, 3 \times 2^{k+1} - 1)$ -ZCP。所提方法可以生成新的偶长 ZCP, 实现了对现有 ZCP 数量的扩展。

关键词: 非周期; 迭代法; Golay 互补对; Z-互补对

中图分类号: TN911.2

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2023052

Construction of new even-length type-II Z-complementary pair

CHEN Xiaoyu^{1,2}, SUN Lianfeng^{1,2}, ZHANG Jiekun^{1,2}, LI Yubo^{1,2}

1. School of Information Science & Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao 066004, China

Abstract: To enrich the parameter forms of Z-complementary pair (ZCP), the constructions of new Type-II ZCP were investigated. First, Type-II $(2^{k+2}N, (2^{k+2}-1)N)$ -ZCP was proposed by using iterative method. When $N=1$, Z-optimal type-II $(2^{k+2}, (2^{k+2}-1))$ -ZCP could be obtained. Then, type-II $(2^{k+1}N + 2^{k+1}, 2^{k+1}N + 2^{k+1} - \frac{N}{2})$ -ZCP was presented by combining the iterative method with the insertion method. When $N=2$, Z-optimal type-II $(3 \times 2^{k+1}, 3 \times 2^{k+1} - 1)$ -ZCP could be obtained. The proposed constructions can generate new even-length ZCP, and expand the number of existing ZCP.

Keywords: aperiodic, iterative method, Golay complementary pair, Z-complementary pair

0 引言

Golay 互补对 (GCP, Golay complementary pair) 是指在每个非零时移处的非周期自相关函数和 (AACs, aperiodic autocorrelation sum) 均等于零的序列对^[1]。GCP 在通信领域得到了广泛的应用, 例如, GCP 可以被应用于信道估计^[2]、雷达波形设计^[3]、异步多载波码分多址通信^[4]等领域。但是, GCP 的可

用长度有限。据推测, 二进制 GCP 的长度只存在 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 形式, 其中, α 、 β 、 γ 是非负整数^[5]。

文献[5]已通过计算机搜索的方式验证该推测在序列长度 100 以内成立。

为了解决 GCP 长度受限的问题, Fan 等^[6]提出了 Z-互补对 (ZCP, Z-complementary pair) 的概念。ZCP 的 AACs 在某一确定区域内为零, 这一区域被称为零相关区 (ZCZ, zero correlation zone)。设 N 是

收稿日期: 2022-08-24; 修回日期: 2022-12-05

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (No.F2021203078, No.F2020203043); 河北省高等学校科学技术研究基金资助项目 (No.ZD2022026); 河北省重点实验室基金资助项目 (No.202250701010046)

Foundation Items: Hebei Natural Science Foundation (No.F2021203078, No.F2020203043), Science and Technology Project of Hebei Education Department (No.ZD2022026), Hebei Key Laboratory Project (No.202250701010046)

ZCP 的长度， Z 是 ZCP 的 ZCZ 宽度，则本文使用 (N, Z) -ZCP 来描述 ZCP 的参数。

根据 ZCP 长度的奇偶情况，二进制 ZCP 被分为两类：奇长二进制 ZCP (OB-ZCP, odd-length binary Z-complementary pair) 和偶长二进制 ZCP (EB-ZCP, even-length binary Z-complementary pair)。Fan 等^[6]推测，对于 OB-ZCP，ZCZ 宽度的理论上界为 $Z_{\max} = \frac{N+1}{2}$ 。对于 EB-ZCP，如果长度 $N \neq 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ ，则 ZCZ 宽度的理论上界为 $N-2$ 。2011 年，Li 等^[7]证明了文献[6]关于 OB-ZCP 的 ZCZ 宽度的推测是正确的。Liu 等^[8]通过插值法，并借助二进制 Golay Davis-Jedwab 序列，提出了 ZCZ 宽度达到理论上界的 OB-ZCP 的系统构造方法。Liu 等^[9]证明了文献[6]关于 EB-ZCP 的 ZCZ 宽度的推测是正确的。

除了按长度分类 ZCP 之外，文献[8]基于 ZCP 的相关性质，进一步将 ZCP 分为 I 型 ZCP 和 II 型 ZCP。I 型 ZCP 的 AACS 在零时移附近存在 ZCZ 区间，II 型 ZCP 的 AACS 在尾端时移附近存在 ZCZ 区间。I 型 ZCP 主要应用于准同步 CDMA (QS-CDMA, quasi-synchronous code division multiple access) 系统^[10]中。II 型 ZCP 的 ZCZ 区间可以消除大时延带来的干扰，因此 II 型 ZCP 在宽带无线通信系统中具有广泛的应用，其中一个典型的应用场景是人口稀少的农村和山区^[11]。

近年来，对于 II 型 OB-ZCP 的研究成果比较丰富。文献[12]通过在 Golay Davis-Jedwab 序列中插入 3 个元素，构造了一类长度为 $2^m + 3$ 的 II 型 OB-ZCP，其中， m 是正整数。Adhikary 等^[13]通过对二进制 GCP 插值，构造了长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma + 1$ ($\alpha, \beta, \gamma \geq 0$) 的 II 型 OB-ZCP。Zeng 等^[14]进一步利用插值和删除函数扩大了文献[13]的结论，提出了一类长度为 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma \pm 1$ ($\alpha, \beta, \gamma \geq 0$) 的 II 型 OB-ZCP 的构造方法。文献[15]提出了新的 Z-最优 II 型 OB-ZCP 的构造方法，其序列长度可以为任意奇数。针对 II 型 EB-ZCP 的研究，现有成果主要如下。文献[15]利用 Turyn 法，构造了长度分别为 $3N$ 和 $14N$ 的 Z-最优 II 型 EB-ZCP，其中 $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ 。文献[15]利用迭代法构造了一类长为 $2^k N + 2^{k-1}$ ，ZCZ 宽度为 $2^k N + 2^{k-1} - N$ ($N \in \mathbb{Z}^+$ ， $k \geq 2$) 的 II 型 EB-ZCP。文献[16]利用多变量函数构造了 II 型 EB-ZCP，其序列长度可以为任意偶数。

本文受文献[15]启发，以迭代构造框架为基础，

给出两类种子序列对构造方法，从而实现了两类 II 型 EB-ZCP 的构造，丰富了现有 II 型 EB-ZCP 的研究成果。

1 基础概念

本文使用的一些符号定义如下。

- 1) $+$ 和 $-$ 分别表示 1 和 -1 。
- 2) $\mathbf{0}_L$ 和 $\mathbf{1}_L$ 分别表示长为 L 的序列，其元素值分别为 0 和 1。
- 3) $\mathbf{c} \parallel \mathbf{d}$ 表示序列 \mathbf{c} 和 \mathbf{d} 的水平链接。
- 4) $\overleftarrow{\mathbf{b}}$ 表示序列 \mathbf{b} 的反向序列。
- 5) \otimes 表示 Kronecker 积。

定义 1 2 个长度为 N 的复数序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 和 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ 的非周期互相关函数定义为

$$\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{N-1-\tau} a_k b_{k+\tau}^*, & 0 \leq \tau \leq N-1 \\ \sum_{k=0}^{N-1+\tau} a_{k-\tau} b_k^*, & -(N-1) \leq \tau \leq -1 \\ 0, & |\tau| \geq N \end{cases} \quad (1)$$

其中， b_k^* 表示 b_k 的复数共轭。特别地，当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时， $\rho_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}(\tau)$ 称为序列 \mathbf{a} 的非周期自相关函数，记为 $\rho_{\mathbf{a}}(\tau)$ 。

定义 2 如果长度为 N 的序列对 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 满足

$$\rho_{\mathbf{c}}(\tau) + \rho_{\mathbf{d}}(\tau) = 0, \quad 1 \leq \tau \leq N-1 \quad (2)$$

则称序列对 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 是 GCP。

定义 3 如果长度为 N 的序列对 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 满足

$$\rho_{\mathbf{c}}(\tau) + \rho_{\mathbf{d}}(\tau) = 0, \quad N-Z+1 \leq \tau \leq N-1 \quad (3)$$

则称序列对 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 是 II 型 ZCP，且 ZCZ 宽度为 Z 。

引理 1^[8] 如果 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 是长度为 N 、ZCZ 宽度为 Z 的 II 型 EB-ZCP，则

$$Z \leq N-1 \quad (4)$$

定义 4 如果式(4)可以取等号，则称 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 达到 Z-最优，即 $Z = N-1$ 为 II 型 EB-ZCP 的 ZCZ 宽度的理论上界。

引理 2^[8] 令 (\mathbf{c}, \mathbf{d}) 是长度为 N 、ZCZ 宽度为 Z 的 Z-最优 II 型 EB-ZCP，则

$$|\rho_{\mathbf{c}}(1) + \rho_{\mathbf{d}}(1)| \geq 4 \quad (5)$$

定义 5^[15] 如果式(5)可以取得等号, 则称 (c, d) 达到最优。

定义 6^[16] 若长度为 N 、ZCZ 宽度为 Z 的 ZCP 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z}{N} \rightarrow 1 \quad (6)$$

则称 ZCP 是渐进 Z-最优的。

定义 7 令 (c, d) 是长度为 N 、ZCZ 宽度为 Z 的 II 型 EB-ZCP, 则其 ZCZ 比率定义为

$$\text{ZCZ比率} = \frac{Z}{N} \quad (7)$$

定义 8^[8] $a = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ 是长度为 N 的序列, 则插入函数 $I(a, r, x)$ 定义为

$$I(a, r, x) = \begin{cases} (x, a_0, a_1, \dots, a_{N-1}), & r = 0 \\ (a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, x), & r = N \\ (a_0, \dots, a_{r-1}, x, a_{r+1}, \dots, a_{N-1}), & 0 < r < N \end{cases} \quad (8)$$

引理 3^[17] 令 (a, b) 和 (c, d) 分别是长度为 N_1 和 N_2 的二进制 GCP, 通过

$$e = \frac{c \otimes (a+b)}{2} - \frac{\overleftarrow{d} \otimes (b-a)}{2} \quad (9)$$

$$f = \frac{d \otimes (a+b)}{2} + \frac{\overleftarrow{c} \otimes (b-a)}{2} \quad (10)$$

可以产生新的长度为 $N_1 N_2$ 的二进制 GCP (e, f) 。

引理 4^[13] 在引理 3 中, 令 (a, b) 是长度为 N_1 的 Golay 核序列对, 且 (c, d) 满足条件

$$\begin{cases} c_i = d_i, & 0 \leq i \leq \frac{N_2}{2} - 1 \\ c_i = -d_i, & \frac{N_2}{2} \leq i \leq N_2 - 1 \end{cases} \quad (11)$$

则产生的 Golay 序列对 (e, f) 具有以下性质

$$\begin{cases} e_i = f_i, & 0 \leq i \leq \frac{N_1 N_2}{2} - 1 \\ e_i = -f_i, & \frac{N_1 N_2}{2} \leq i \leq N_1 N_2 - 1 \end{cases} \quad (12)$$

引理 4 可以产生长度形式为 2^α 、 26^γ 、 $2^\alpha 10^\beta$ 、 $2^\alpha 26^\gamma$ 、 $10^\beta 26^\gamma$ 和 $2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \geq 1$) 的二进制 GCP, 且此类二进制 GCP 的前半部分对应元素符号相同, 后半部分对应元素符号相反。将此类二进制 GCP 称为特殊的二进制 Turyn GCP (SBT-GCP, special binary Turyn GCP)。表 1 列出了一些 Golay 核序列对。

表 1	Golay 核序列对
长度	(a, b)
2	$\begin{pmatrix} ++ \\ +- \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} +++-+---++ \\ +++----- \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} ++++++-----+-----+-----+ \\ ++++++-----+-----+-----+ \end{pmatrix}$

2 II 型偶长 ZCP 的构造

本文以迭代法为基础, 提出了两类 II 型 EB-ZCP 的构造方法。

引理 5 令 (e^0, f^0) 为长度为 N 的种子序列对, 按照式(13)经过 k 次迭代, 得到序列对 (e^k, f^k) 。

$$e^k = e^{k-1} \parallel f^{k-1}, \quad f^k = e^{k-1} \parallel -f^{k-1} \quad (13)$$

则序列对 (e^k, f^k) 的 AACCS 为

$$\rho_{e^k}(\tau) + \rho_{f^k}(\tau) = \begin{cases} 2^k (\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau)), & 1 \leq \tau \leq N-1 \\ 0, & N \leq \tau \leq 2^k N-1 \end{cases} \quad (14)$$

其中, k 为迭代次数, $k \geq 1$ 。

由引理 5 可以看出, 迭代后所得序列对的 AACCS 在 $1 \leq \tau \leq N-1$ 时只取决于种子序列对的 AACCS 和迭代次数, 而在其他位移点为零, 因此种子序列对的构造至关重要, 本文提出了两类种子序列对的构造方法, 以此完成 Z-最优 II 型 ZCP 的构造。

定理 1 令 (a, b) 是长度为 N 的 GCP, 构造序列对 (e^0, f^0) 为

$$e^0 = (a \parallel a \parallel b \parallel b) \quad (15)$$

$$f^0 = (a \parallel a \parallel -b \parallel -b) \quad (16)$$

利用式(13)对 (e^0, f^0) 进行 k 次迭代后, 所得序列对 (e^k, f^k) 是 II 型 $(2^{k+2}N, (2^{k+2}-1)N)$ -ZCP, 其中 k 是迭代次数, 且 (e^k, f^k) 是渐进 Z-最优的。

证明 分以下 7 种情况讨论 e^0 和 f^0 的 AACCS。

情况 1 $1 \leq \tau \leq N-1$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = 2\rho_a(N-\tau) + 2\rho_b(N-\tau) = 0$$

情况 2 $\tau = N$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = 2(\rho_a(0) + \rho_b(0)) = 4N$$

情况 3 $N+1 \leq \tau \leq 2N-1$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = 2\rho_a(\tau - N) + 2\rho_b(\tau - N) = 0$$

情况 4 $\tau = 2N$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = 2\rho_{ba}(0) - 2\rho_{ba}(0) = 0$$

情况 5 $2N + 1 \leq \tau \leq 3N - 1$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = 2\rho_{ab}(\tau - 2N) + \rho_{ba}(3N - \tau) - 2\rho_{ab}(\tau - 2N) - \rho_{ba}(3N - \tau) = 0$$

情况 6 $\tau = 3N$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = \rho_{ba}(0) - \rho_{ba}(0) = 0$$

情况 7 $3N + 1 \leq \tau \leq 4N - 1$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = \rho_{ab}(\tau - 3N) - \rho_{ab}(\tau - 3N) = 0$$

故可得

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = \begin{cases} 4N, & \tau = N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 (e^0, f^0) 是 II 型 $(4N, 3N) - ZCP$ 。根据引理 5，序列对 (e^k, f^k) 的 AACs 只在 $\tau = N$ 处有值，其余皆为零，即

$$\rho_{e^k}(\tau) + \rho_{f^k}(\tau) = \begin{cases} 2^k \times 4N, & \tau = N \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中， k 是迭代次数。因此， (e^k, f^k) 是 II 型 $(2^{k+2}N, (2^{k+2} - 1)N) - ZCP$ 。

因为 (e^k, f^k) 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z}{N} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+2} - 1}{2^{k+2}} \rightarrow 1$$

所以， (e^k, f^k) 是渐进 Z-最优的 II 型 EB-ZCP。

证毕。

当序列对 (a, b) 长度 $N = 1$ 时，定理 1 可以得到 Z-最优 II 型 $(2^{k+2}, (2^{k+2} - 1)) - ZCP$ 。表 2 给出了部

分该种形式的 ZCP。

定理 2 (a, b) 是长度为 N 的 SBT-GCP，令 $e_1 = I(a, 0, x_0)$ 、 $e_2 = I(b, 0, x_1)$ 、 $f_1 = I(a, 0, y_0)$ 、 $f_2 = I(-b, 0, y_1)$ ， $x_0 = y_0$ ， $x_1 = -y_1$ 。构造序列对 $e^0 = (e_1 \parallel e_2)$ 和 $f^0 = (f_1 \parallel f_2)$ ，则 (e^0, f^0) 是 II 型 $\left(2N + 2, \frac{3N}{2} + 2\right) - ZCP$ 。

证明 分以下 3 种情况讨论 e^0 和 f^0 的 AACs。

情况 1 $1 \leq \tau \leq N$

$$\rho_{e^0}(\tau) = x_0 a_{\tau-1} + \rho_a(\tau) + \rho_{ba}(N - \tau + 1) + \rho_b(\tau) + x_1(a_{N-\tau} + b_{\tau-1})$$

$$\rho_{f^0}(\tau) = y_0 a_{\tau-1} + \rho_a(\tau) - \rho_{ba}(N - \tau + 1) + \rho_b(\tau) + y_1(a_{N-\tau} - b_{\tau-1})$$

由条件 $x_0 = y_0$ ， $x_1 = -y_1$ ，且 (a, b) 是 SBT-GCP 可得

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = x_0 a_{\tau-1} + 2x_1 b_{\tau-1} = \begin{cases} \pm 4, & 1 \leq \tau \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} + 1 \leq \tau \leq N \end{cases}$$

情况 2 $\tau = N + 1$

$$\rho_{e^0}(\tau) = x_0 x_1 + \rho_{ab}(0)$$

$$\rho_{f^0}(\tau) = y_0 y_1 - \rho_{ab}(0)$$

由条件 $x_0 = y_0$ ， $x_1 = -y_1$ 可得

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = x_0 x_1 + y_0 y_1 = 0$$

情况 3 $N + 2 \leq \tau \leq 2N + 1$

$$\rho_{e^0}(\tau) = x_0 b_{\tau-N-1} + \rho_{ab}(\tau - N - 1)$$

$$\rho_{f^0}(\tau) = -y_0 b_{\tau-N-1} - \rho_{ab}(\tau - N - 1)$$

由条件 $x_0 = y_0$ ， $x_1 = -y_1$ 可得

表 2

本文所得长度为 2^{k+2} 的 II 型 ZCP

长度	ZCZ 宽度	ZCP(s, t)	$ \rho_s(\tau) + \rho_t(\tau) _{\tau=0}^{N-1}$
4	3	$\begin{pmatrix} +++- \\ ++++ \end{pmatrix}$	$(8, 4, \mathbf{0}_2)$
8	7	$\begin{pmatrix} +++-++++ \\ +-+----- \end{pmatrix}$	$(16, 8, \mathbf{0}_6)$
16	15	$\begin{pmatrix} +++-+++++----- \\ +-+-----+++++ \end{pmatrix}$	$(32, 16, \mathbf{0}_{14})$
32	31	$\begin{pmatrix} +++-+++++-----+++++ \\ +-+-----+++++ \end{pmatrix}$	$(64, 32, \mathbf{0}_{30})$

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = x_0 b_{\tau-N-1} - y_0 b_{\tau-N-1} = 0$$

故可得

$$\rho_{e^0}(\tau) + \rho_{f^0}(\tau) = \begin{cases} \pm 4, & 1 \leq \tau \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 (e^0, f^0) 是 II 型 $\left(2N+2, \frac{3N}{2}+2\right)$ -ZCP。证毕。

定理 3 利用式(13)对定理 2 中所得序列对 (e^0, f^0) 进行 k 次迭代后, 所得序列对 (e^k, f^k) 是 II 型 $\left(2^{k+1}N+2^{k+1}, 2^{k+1}N+2^{k+1}-\frac{N}{2}\right)$ -ZCP, 其中, k 是迭代次数, 且 (e^k, f^k) 是渐进 Z-最优的。

证明 根据引理 5 和定理 2 可得, 序列对 (e^k, f^k) 的 AACCS 为

$$\rho_{e^k}(\tau) + \rho_{f^k}(\tau) = \begin{cases} \pm 2^{k+2}, & 1 \leq \tau \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中, k 是迭代次数, 所以 (e^k, f^k) 是 II 型 $\left(2^{k+1}N+2^{k+1}, 2^{k+1}N+2^{k+1}-\frac{N}{2}\right)$ -ZCP。

由于 (e^k, f^k) 满足

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z}{N} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1}N+2^{k+1}-\frac{N}{2}}{2^{k+1}N+2^{k+1}} \rightarrow 1$$

因此, (e^k, f^k) 是渐进 Z-最优 II 型 EB-ZCP。证毕。

当序列对 (a, b) 长度 $N=2$ 时, 定理 3 可得 Z-最优 II 型 $(3 \times 2^{k+1}, 3 \times 2^{k+1} - 1)$ -ZCP。

3 构造方法比较

目前, II 型 EB-ZCP 的研究成果并不多。本文

在迭代法的基础上, 提出了两类 II 型 EB-ZCP 的构造方法, 所得到的 EB-ZCP 与现有构造方法对比如下。

文献[16]利用多变量函数, 提出了一类 II 型 EB-ZCP 的直接构造方法, 其长度可以为任意偶数, 表示为 $2^m P$, $P \in \mathbb{Z}^+$ 。当 $P=2$ 时, 该方法可以得到长度为二次幂型的 Z-最优 II 型 EB-ZCP。当 $P \neq 2$ 时, 该方法得到 ZCP 的 ZCZ 宽度随 P 取值的增大而减小。与文献[16]相比, 虽然本文得到的 ZCP 长度被其覆盖, 但是在部分长度下, 本文定理 2 得到的 ZCP 具有更大的 ZCZ 比率。例如, 对于长度 $N=6$ 、 $N=10$, 文献[16]可以得到 $(6,4)$ -ZCP、 $(10,6)$ -ZCP, 其 ZCZ 比率分别为 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{5}$ 。本文定理 2 可以得到 $(6,5)$ -ZCP 和 $(10,8)$ -ZCP, 其 ZCZ 比率分别为 $\frac{5}{6}$ 、 $\frac{4}{5}$ 。此外, 当 $N=2$ 时, 本文定理 3 可得 Z-最优 II 型 $(3 \times 2^{k+1}, 3 \times 2^{k+1} - 1)$ -ZCP。表 3 对文献[16]、本文定理 2 和本文定理 3 构造的部分 ZCP 进行了比较。

文献[15]定理 2 利用迭代法, 提出了一类 II 型 EB-ZCP 的构造方法, 其可以生成除二次幂长度外的偶数长度。文献[15]定理 3 构造了长度为 $3N$ 、 $14N$ 的 Z-最优 II 型 EB-ZCP。表 4 对文献[15]和本文的构造方法进行了比较, 其中, ZCZ 比率是在 N 趋于无穷大时的取值。

当 $N=1$ 时, 本文定理 1 可得二元和四元 Z-最优 II 型 $(2^{k+2}, (2^{k+2} - 1))$ -ZCP, 文献[15]构造方法不能生成此参数的 ZCP。文献[15]可以得到最优 II 型 $(6,5)$ -ZCP、 $(14,13)$ -ZCP。本文定理 1 和本文定理 2 分别可得最优 II 型 $(4,3)$ -ZCP 和 $(6,5)$ -ZCP。

表 3 长度为 6 和 24 的 II 型 ZCP 比较

构造方法	长度	ZCZ 宽度	ZCP(s,t)	$ \rho_s(\tau) + \rho_t(\tau) _{\tau=0}^{N-1}$
文献[16]	6	4	$\begin{pmatrix} + - + - + - \\ - + - + - + \end{pmatrix}$	$(12, 8, 4, \mathbf{0}_3)$
	24	22	$\begin{pmatrix} + - + - + - + - + - + - + - + - + - + - + - \\ - + - + - + - + - + - + - + - + - + - + - + - \end{pmatrix}$	$(48, 32, 16, \mathbf{0}_{21})$
本文定理 2	6	5	$\begin{pmatrix} + + + + + - \\ + + + - + - \end{pmatrix}$	$(12, 4, \mathbf{0}_4)$
本文定理 3	24	23	$\begin{pmatrix} + + + + + - + + + + + - + + + + + - + + + + + - \\ + + + + + - + + + + + - + + + + + - + + + + + - \end{pmatrix}$	$(48, 16, \mathbf{0}_{22})$

表 4 本文构造方法与文献[15]构造方法比较

构造方法	ZCP 长度	ZCZ 宽度	零相关区外的值 (v)	ZCZ 比率	是否 Z-最优
文献[15]定理 2	$2^k N + 2^{k-1}$ $N \in \mathbb{Z}^+, k \in \{2, 3, 4, \dots\}$	$2^k N + 2^{k-1} - N$	$4 \leq v \leq 2^k (2N - 1)$	$\frac{2^k - 1}{2^k}$	当 $N=1$ 时, Z-最优
文献[15]定理 3	$3N, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$ $14N, N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$3N - 1$ $14N - 1$	$2N$ $4N$	1 1	是 是
本文定理 1	$2^{k+2} N$ $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$(2^{k+2} - 1)N$	$2^k \times 4N$	$\frac{2^{k+2} - 1}{2^{k+2}}$	当 $N=1$ 时, Z-最优
本文定理 2	$2N + 2$ $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$\frac{3N}{2} + 2$	4	$\frac{3}{4}$	当 $N=2$ 时, Z-最优
本文定理 3	$2^{k+1} N + 2^{k+1}$ $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ $N = 2^\alpha 10^\beta 26^\gamma$	$2^{k+1} N + 2^{k+1} - \frac{N}{2}$	2^{k+2}	$\frac{2^{k+2} - 1}{2^{k+2}}$	当 $N=2$ 时, Z-最优

文献[15]定理 2 产生的 ZCP 长度包含本文定理 2 得到的 ZCP 长度。但是, 文献[15]定理 2 得到的 ZCP 零相关区外的值为 $4 \leq v \leq 2^k (2N - 1)$, 它取决于种子序列的 AACs 和迭代次数。而本文定理 2 所得序列对零相关区外的值是定值 4。表 5 对比分析了 (10,8)-ZCP、(18,14)-ZCP 和 (34,26)-ZCP 的自相关特性和峰均包络功率比 (PMEPR, peak-to-mean envelope power ratio)。本文定理 2 所得 ZCP 用 (e_0, f_0) 表示, 文献[15]定理 2 所得 ZCP 用 (e_1, f_1) 表示。本文定理 2 和文献[15]定理 2 生成的长度为 10 的 ZCP 分别为

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + + + + - + + + - + \\ + + + + - - - - + - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + - + + - + - + \\ + - + + - - - - + - \end{pmatrix}$$

本文定理 2 和文献[15]定理 2 生成的长度为 18 的 ZCP 分别为

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + + + + - + + - + + + + - - - - + - \\ + + + + - + + - + - - - - + + + - + \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - + + + - - - - + + + - + + - - \\ - + + + - - - - + + + - + + - - + \end{pmatrix}$$

本文定理 2 和文献[15]定理 2 生成的长度为 34 的 ZCP 分别为

$$\begin{pmatrix} e_0 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + + + + - + + - + + + + - - - - + - \\ + + + + - + + - + + + + - - - - + + + - + \\ + + + + - + + - + + + + - - - - + - \\ - - - - + - - - + + + + - - - - + - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - + + + + - + - + + + - + - + + + \\ - + + + + - + - + + + - + - + + + - \\ - + + + + - + - + + + - + - + + + \\ + - - - - + - + + + + - + - + + + \end{pmatrix}$$

表 5 给出了这些具体序列的自相关函数值和 PMEPR 值。从表 5 可以发现, 本文定理 2 得到的 ZCP 零相关区外的值更小, 相应 PMEPR 也更小。

4 结束语

本文利用迭代法和插值法, 提出了 II 型 $(2^{k+2} N, (2^{k+2} - 1)N)$ -ZCP 和 $\left(2^{k+1} N + 2^{k+1}, 2^{k+1} N + 2^{k+1} - \frac{N}{2}\right)$ -ZCP 的构造方法, 其中 k 是迭代次数。

当 $N=1$ 时, 本文定理 1 可以得到 Z-最优 II 型 $(2^{k+2}, (2^{k+2} - 1))$ -ZCP。当 $N=2$ 时, 本文定理 3 可以得到 Z-最优 II 型 $(3 \times 2^{k+1}, 3 \times 2^{k+1} - 1)$ -ZCP。本文定理 2 得到 II 型 $\left(2N + 2, \frac{3N}{2} + 2\right)$ -ZCP, 其零相关区外的值与现有文献相比达到了最小值, 可以为无线通信系统提供性能更加优良的 Z-互补序列对。

表 5 II 型 ZCP 比较

构造方法	长度	ZCZ 宽度	零相关区外的值	$ \rho_{e_i}(\tau) + \rho_{f_i}(\tau) _{\tau=0}^{N-1}, i \in \{0,1\}$	PMEPR
文献[15]定理 2	10	8	$4 \leq v \leq 12$	$(20, 12, 4, \mathbf{0}_7)$	(4.4 444, 3.600 0)
	18	14	$4 \leq v \leq 28$	$(36, 4, 20, 4, 4, \mathbf{0}_{13})$	(4.3 622, 3.410 6)
	34	26	$4 \leq v \leq 60$	$(68, 20, 20, 12, 4, 4, 12, 12, 4, \mathbf{0}_{25})$	(4.2 141, 4.446 5)
本文定理 2	10	8	4	$(20, 4, 4, \mathbf{0}_7)$	(3.6 000, 2.868 1)
	18	14	4	$(36, 4, 4, 4, 4, \mathbf{0}_{13})$	(2.5 060, 2.711 8)
	34	26	4	$(68, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, \mathbf{0}_{25})$	(2.9 412, 2.521 6)

参考文献:

[1] GOLAY M. Complementary series[J]. IRE Transactions on Information Theory, 1961, 7(2): 82-87.

[2] WANG S Q, ABDI A. MIMO ISI channel estimation using uncorrelated Golay complementary sets of polyphase sequences[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2007, 56(5): 3024-3039.

[3] KUMARI P, CHOI J, GONZÁLEZ-PRELCIC N, et al. IEEE 802.11ad-based radar: an approach to joint vehicular communication-radar system[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2018, 67(4): 3012-3027.

[4] LIU Z L, GUAN Y L, CHEN H H. Fractional-delay-resilient receiver design for interference-free MC-CDMA communications based on complete complementary codes[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2015, 14(3): 1226-1236.

[5] BORWEIN P B, FERGUSON R A. A complete description of Golay pairs for lengths up to 100[J]. Mathematics of Computation, 2004, 73(246): 967-985.

[6] FAN P Z, YUAN W N, TU Y F. Z-complementary binary sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2007, 14(8): 509-512.

[7] LI X D, FAN P Z, TANG X H, et al. Existence of binary Z-complementary pairs[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(1): 63-66.

[8] LIU Z L, PARAMALLI U, GUAN Y L. Optimal odd-length binary Z-complementary pairs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2014, 60(9): 5768-5781.

[9] LIU Z L, PARAMALLI U, GUAN Y L. On even-period binary Z-complementary pairs with large ZCZs[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2014, 21(3): 284-287.

[10] TANG X H, FAN P Z, LINDNER J. Multiple binary ZCZ sequence sets with good cross-correlation property based on complementary sequence sets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(8): 4038-4045.

[11] LEE W C Y. Mobile communications design fundamentals[M]. New Jersey: Wiley, 1993.

[12] SHEN B S, YANG Y, ZHOU Z C, et al. New optimal binary Z-complementary pairs of odd length 2^m+3 [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(12): 1931-1934.

[13] ADHIKARY A R, MAJHI S, LIU Z L, et al. New sets of optimal odd-length binary Z-complementary pairs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2020, 66(1): 669-678.

[14] ZENG F X, HE X P, ZHANG Z Y, et al. Optimal and Z-optimal type-II odd-length binary Z-complementary pairs[J]. IEEE Communications Letters, 2020, 24(6): 1163-1167.

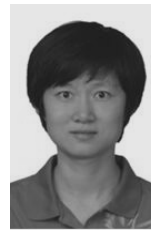
[15] GU Z, ZHOU Z C, WANG Q, et al. New construction of optimal

type-II binary Z-complementary pairs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2021, 67(6): 3497-3508.

[16] KUMAR R, SARKAR P, SRIVASTAVA P K, et al. A direct construction of asymptotically optimal type-II ZCP for every possible even length[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2021, 28: 1799-1802.

[17] FAN P Z, DARNELL M. Sequence design for communications applications[M]. London: Research Studies Press LTD, 1996.

[作者简介]



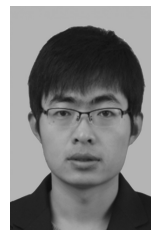
陈晓玉 (1983-), 女, 内蒙古赤峰人, 博士, 燕山大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为序列设计、无线通信技术。



孙连峰 (1999-), 男, 山东济南人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为序列设计。



张杰坤 (1999-), 男, 河南郑州人, 燕山大学硕士生, 主要研究方向为序列设计。



李玉博 (1985-), 男, 河北衡水人, 博士, 燕山大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为压缩感知技术、序列设计与编码理论。