

# 基于两分量广义加权分数傅里叶变换的大规模 MIMO 波形设计

李行健, 宋志群, 李勇, 刘丽哲, 王斌, 汪畅

(中国电科网络通信研究院通信网信息传输与分发技术重点实验室, 河北 石家庄 050081)

**摘要:** 针对大规模多输入多输出 (MIMO) 系统下传统信号分集技术需要牺牲通信速率或频谱等通信资源的缺陷, 提出了一种基于两分量广义加权分数傅里叶变换 (DCGWFRFT) 的波形设计方法。该方法通过引入计算分集的概念, 以一定的计算资源为代价提升系统的分集性能, 且发送端不需要已知信道状态信息。分析了基于 DCGWFRFT 的波形的计算分集原理, 并根据该原理提出了一种基于 DCGWFRFT 的波形设计与变换流程, 在保持物理层安全特性的基础上提升波形的抗衰落能力。理论分析证明, 在无噪声的情况下, 所提出的波形设计与变换流程能够完美恢复原始发送信号; 在有噪声的情况下, 所提出的波形相比于未经变换的波形的误差能量分布更加平均。仿真结果显示, 在误码率为  $10^{-3}$  时, 基于 DCGWFRFT 的波形相比于未经变换的波形有至少 1.7 dB 的比特信噪比性能优势。

**关键词:** 大规模 MIMO; 分集; 两分量广义加权分数傅里叶变换; 波形设计

**中图分类号:** TN92

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.11959/j.issn.1000-436x.2023226

## Double-component combined generalized weighted fractional Fourier transform based waveform design for massive MIMO

LI Xingjian, SONG Zhiqun, LI Yong, LIU Lizhe, WANG Bin, WANG Chang

Science and Technology on Communication Networks Laboratory, Academy for Network & Communications of CETC, Shijiazhuang 050081, China

**Abstract:** In order to overcome the drawback of conventional diversity technologies that sacrificing valuable communication resources such as data rate or bandwidth in massive multiple input multiple output (MIMO) systems, a double-component combined generalized weighted fractional Fourier transform (DCGWFRFT) based waveform design method was proposed. The concept of computational diversity was introduced, and the diversity performance was improved via moderate computational resources without requiring channel state information at the transmitter. The principle of computational diversity of DCGWFRFT based waveform was firstly analyzed, and a DCGWFRFT based waveform design and transform process, which could be adopted combined with existing diversity methods, was then proposed according to the principle. Theoretical analysis proves that the proposed waveform design and transform process can perfectly recover the original transmitted signal in noise-free case, and the power of error of proposed waveform is distributed more evenly than that of untransformed waveform in noisy case. Simulation results show that the performance of DCGWFRFT based waveform has an advantage of at least 1.7 dB in bit signal-to-noise ratio compared with untransformed waveform when bit error rate is  $10^{-3}$ .

**Keywords:** massive MIMO, diversity, DCGWFRFT, waveform design

收稿日期: 2023-06-28; 修回日期: 2023-09-18

通信作者: 李勇, young\_li\_54@126.com

基金项目: 中国博士后科学基金资助项目 (No.2022M712974); 通信网信息传输与分发技术重点实验室基金资助项目 (No.FFX22641X022)

**Foundation Items:** The China Postdoctoral Science Foundation Project (No.2022M712974), The Science and Technology on Communication Networks Laboratory Foundation project (No.FFX22641X022)

## 0 引言

随着高清视频等新兴数据业务的迅速发展，移动通信终端对无线通信传输速率的需求日益增长。针对用户的高速率传输需求，大规模多输入多输出（MIMO, multiple input multiple output）技术是当前 5G 以及未来 6G 中提升系统容量的核心技术之一<sup>[1-2]</sup>。通过在基站端配置大规模的天线阵列，大规模 MIMO 技术能够在不使用额外频谱和发送功率的条件下提升通信速率。大规模 MIMO 技术发展至今已经能够与多项新兴无线通信技术相融合，例如毫米波通信<sup>[3]</sup>、智能反射表面等<sup>[4]</sup>。

除了提升系统的通信速率外，大规模 MIMO 系统还能够提升系统的分集性能。然而，由于在天线数一定时大规模 MIMO 系统的空间分集增益和复用增益需要权衡<sup>[5-6]</sup>，因此提升空间分集性能必然要以降低通信速率或增加天线数量为代价。除了空间分集外，时间分集、频率分集、角度分集、空时分集等天线分集技术同样可以应用在大规模 MIMO 系统中<sup>[7-10]</sup>，例如，MIMO 系统中经典的 Alamouti 空时编码<sup>[10]</sup>就是一种典型的空时分集编码技术。但是，这些分集技术同样需要以降低通信速率、增加带宽、增加天线数量为代价。因此，研究以其他维域的廉价资源为代价提升系统的分集性能具有重要的理论意义和应用前景。

在传统的空时编码技术的基础上，研究者还提出了大量新兴的预编码技术<sup>[11-20]</sup>来提升通信系统的复用与分集增益，其提升系统性能的原理包括消除用户间干扰（IUI, inter-user interference）、消除同一用户在不同天线的符号间干扰（ISI, inter-symbol interference），以及最大化用户的信道容量<sup>[11-13]</sup>。预编码技术可以分为线性预编码<sup>[12]</sup>和非线性预编码<sup>[13]</sup>，其中，线性预编码技术主要包括最大比传输（MRT, maximum ratio transmission）<sup>[11-12]</sup>、迫零（ZF, zero-forcing）<sup>[11,14]</sup>、最小均方误差（MMSE, minimum mean square error）<sup>[11-12]</sup>，以及奇异值分解（SVD, singular value decomposition）<sup>[15]</sup>等，而非线性预编码技术主要包括脏纸编码（DPC, dirty-paper coding）<sup>[14,20]</sup>、TH（Tomlinson-Harashima）<sup>[18]</sup>、向量扰动（VP, vector perturbation）<sup>[19]</sup>、格约基辅助（LR, lattice reduction aided）<sup>[11]</sup>，以及几何平均值分解-VBLAST（GMD-VBLAST, geometric mean decomposition-vertical bell laboratories layered space-time）<sup>[16-17]</sup>

等。在这些方法中，MRT 和 SVD 的目标为最大化信道容量，ZF、MMSE 和 GMD-VBLAST 的目标为消除 ISI，而 DPC、TH、VP 和 LR 的目标为消除 IUI。然而，上述预编码技术均需要发送端已知信道状态信息，这需要接收端与发送端建立反馈链路，并在信道估计完成后由接收端将信道状态信息通过该链路反馈至发送端，而信道估计和信道反馈过程均会产生误差，且信道反馈的开销也非常大。因此，本文希望提出一种不需要信道状态信息的波形设计方法，在不需要信道反馈的情况下提升系统分集性能。

在物理层安全领域，加权分数傅里叶变换（WFRFT, weighted fractional Fourier transform）技术作为一种新型的波形设计技术由文献[21]首次提出，并由文献[22]应用至无线通信系统。WFRFT 是经典傅里叶变换（FT, Fourier transform）的一种扩展，其突破了 FT 只能将信号从时域变换为频域的限制，将 FT 扩展为能够将时域（频域）信号变换为时频域混合信号的变换技术。由于经过变换后的信号波形会出现星座模糊、星座旋转等特性，因此该技术能够显著提高信号的抗截获能力<sup>[23-28]</sup>。文献[23]提出了一种基于 WFRFT 的物理层安全波形设计技术，该技术利用类波束成形的方法在不影响正常接收方通信质量的同时对窃听方进行屏蔽。文献[24]提出了一种基于 WFRFT 的物理层安全用户协同技术，该技术可以在损失正常接收方通信性能的条件下在窃听方产生一个恒定的“人工噪声”效应。在 WFRFT 的基础上，文献[25-27]进一步研究了一种基于多项 WFRFT（M-WFRFT, multi-weighted type fractional Fourier transform）和一种基于多参数 WFRFT（MP-WFRFT, multiple parameters weighted type fractional Fourier transform）的物理层安全波形设计技术。相比于 WFRFT，M-WFRFT 和 MP-WFRFT 具有更复杂的星座图和更大的参数空间，能够使波形具有更强的安全性。文献[28]在 WFRFT 的基础上提出了一种广义加权分数傅里叶变换（GWRFT, generalized weighted fractional Fourier transform）技术。该技术将 WFRFT 技术进行了推广，使信号的变换形式更加丰富。

除了提升信号波形的安全性外，近几年的研究显示基于 WFRFT 的波形设计技术还可以用于提升信号的抗衰落能力<sup>[29-31]</sup>。文献[29-30]提出了一种基于两分量广义加权分数傅里叶变换（DCGWRFT, dou-

ble-component combined generalized weighted fractional Fourier transform) 的波形设计技术。该技术是 GWFRT 的一个特殊情况, 其仅保留了信号在经过 GWFRT 后的时域分量或频域分量。文献[29-30]通过定性分析和仿真分析证明, 该波形设计技术相比于常规的单载波波形或 OFDM 波形具有更强的抗衰落能力。然而, 上述工作对 DCGWFRT 的研究并未深入定量分析的层面, 且所研究的通信系统也仅限于单天线的场景。文献[31]首次提出了“计算分集”的概念, 并根据这一概念分别提出了时域两分量和频域两分量的分集方法, 但仅限于单天线场景。

本文在保持物理层安全特性的基础上, 进一步结合大规模 MIMO 系统研究了基于 DCGWFRT 的抗衰落波形设计问题。针对传统分集技术需要消耗重要通信资源的问题, 提出利用计算域的资源在不需要已知信道状态信息的情况下提升系统的分集性能, 并分析了大规模 MIMO 系统下基于 DCGWFRT 的信号波形的计算分集原理和物理层安全原理。相比于文献[31], 本文通过数学定理的方式进一步分析和证明了大规模 MIMO 系统下的计算分集可行性。根据上述计算分集原理, 在发送端和接收端分别建立了基于 DCGWFRT 的信号正变换和逆变换流程, 且该流程可以与现有的分集技术以及预编码技术结合使用。理论分析证明, 在无噪声的情况下, 所提出的波形设计与信号变换流程能够完美恢复原始发送符号; 而在有噪声的情况下, 所提出的信号波形相比于未进行变换的信号波形的误差能量分布更加均匀。仿真结果显示, 基于 DCGWFRT 的信号波形相比于未经变换的信号波形具有更低的误码率 (BER, bit error rate)。

符号定义如下。本文分别采用斜体、粗体斜体小写、粗体斜体大写分别表示单字母标量、向量和矩阵, 且  $\mathbf{X}^T$ 、 $\mathbf{X}^H$ 、 $\mathbf{X}^*$ 、 $\mathbf{X}^{-1}$  和  $\text{tr}\{\mathbf{X}\}$  分别表示矩阵  $\mathbf{X}$  的转置、共轭转置、共轭、逆矩阵和迹。 $\mathbb{R}$ 、 $\mathbb{C}^N$  和  $\mathbb{C}^{N \times N}$  分别表示实数空间、维度为  $N$  和  $M \times N$  的复数空间。 $\mathbf{x} \sim \text{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  表示向量  $\mathbf{x}$  服从均值为  $\boldsymbol{\mu}$ 、协方差矩阵为  $\boldsymbol{\Sigma}$  的循环对称复高斯分布。 $\mathbf{x} \odot \mathbf{y}$  表示向量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的点乘运算。 $\mathbf{X} = \text{diag}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M)$  表示由矩阵  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M$  组成的块对角矩阵。 $E[\mathbf{X}]$  表示随机矩阵  $\mathbf{X}$  的期望。 $\text{Mean}(\mathbf{x})$  和  $\text{Var}(\mathbf{x})$  分别表示向量  $\mathbf{x}$  所有元素的统计平均和统计方差。 $\arg\{x\}$  表示复数  $x$  的相位, 且值域为  $[0, 2\pi)$ 。

## 1 系统模型

本文研究的是大规模 MIMO 无线通信系统下的波形设计问题, 通信场景如图 1 所示, 其中基站和用户均配置  $N$  根天线。

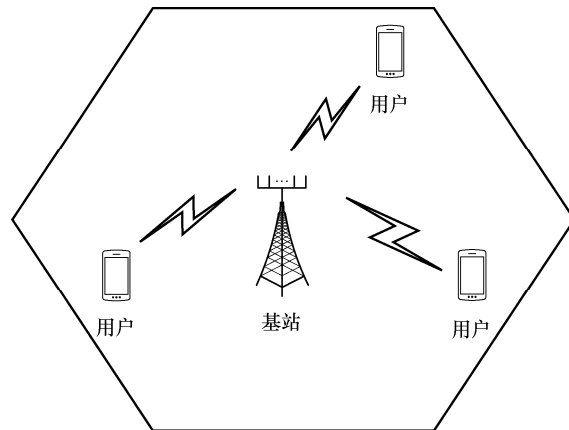


图1 大规模 MIMO 无线通信场景

假设基站在第  $i$  个时隙发送已调制信号  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^N$ , 且满足  $E[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H] = \mathbf{I}$ , 此时用户在第  $i$  个时隙的接收信号可以表示为

$$\mathbf{y}_i = \sqrt{\frac{E_s}{N_t}} \tilde{\mathbf{H}}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i \triangleq \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i \quad (1)$$

其中,  $\tilde{\mathbf{H}}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$  表示窄带瑞利衰落信道,  $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$  表示等效信道矩阵,  $E_s$  表示发送符号能量,  $\mathbf{n}_i \in \mathbb{C}^N$  表示均值为零、方差为  $\sigma_n^2$  的复加性白高斯噪声。用户采用 MMSE 信号检测算法恢复原始信号, 此时接收信号  $\mathbf{y}_i$  经过 MMSE 信号检测后为

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_i^H \mathbf{y}_i \quad (2)$$

且假设用户在信号检测时已知信道状态信息  $\mathbf{H}_i$  和噪声功率  $\sigma_n^2$ 。在实际的通信过程中, 信道状态信息和噪声功率可以通过发送导频序列的方式分别进行估计。最后将  $\hat{\mathbf{x}}_i$  进行解调即可得到原始的发送比特流。

对于大规模 MIMO 系统, 由于其分集增益和复用增益需要权衡, 因此当数据流数较多时系统通过空间分集所获得的分集增益有限, 导致误码率性能下降。对于这一问题, 传统的空时编码方法通过在多个时隙发送重复符号的方式提升分集性能, 例如时间分集技术或者 Alamouti 码。然而, 这些方法提升分集性能的代价是降低系统的数据速率。现有的预编码算法通过消除 IUI 和 ISI 的方式降低误码率, 但是需要发送端已知完美的信道状态信息。针对这一缺

陷，本文提出了一种基于 DCGWFRFT 的波形设计方法，该方法能够在不损失传输速率的条件下，通过计算分集的方式以一定计算复杂度的代价提升系统的通信稳定性，且发送端不需要已知信道状态信息。

## 2 算法设计

### 2.1 DCGWFRFT 定义

首先，介绍 DCGWFRFT 的概念。假设  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  是一个离散符号序列，那么  $\mathbf{x}$  的 DCGWFRFT 的时域两分量正变换为

$$\mathbf{z} \triangleq \omega_0^+ \mathbf{x} + \omega_2^+ \Gamma \mathbf{x} \quad (3)$$

频域两分量正变换为

$$\mathbf{z} \triangleq \omega_1^+ \mathbf{D} \mathbf{x} + \omega_3^+ \Gamma \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (4)$$

其中， $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  为维度为  $N$  的离散傅里叶矩阵， $\Gamma \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是一个置换矩阵，定义为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

系数  $\omega_0^+ = \frac{e^{j\theta_0} + e^{j\theta_1}}{2}$ ， $\omega_1^+ = \frac{e^{j\theta_0} - e^{j\theta_1}}{2}$ ，

$\omega_2^+ = \frac{e^{j\theta_0} - e^{j\theta_1}}{2}$ ， $\omega_3^+ = \frac{e^{j\theta_0} + e^{j\theta_1}}{2}$ ，这里  $\theta_i \in [0, 2\pi]$  为参数， $i = 0, \dots, 3$ 。经过 DGWFRFT 的正变换后，原始信号  $\mathbf{x}$  变换为由 2 个时域信号分量  $\omega_0^+ \mathbf{x}$  和  $\omega_2^+ \Gamma \mathbf{x}$  或 2 个频域信号分量  $\omega_1^+ \mathbf{D} \mathbf{x}$  和  $\omega_3^+ \Gamma \mathbf{D} \mathbf{x}$  组合的信号。类似地，符号序列  $\mathbf{x}$  的 DGWFRFT 的时域两分量逆变换为

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}_G^- \mathbf{x} \triangleq \omega_0^- \mathbf{x} + \omega_2^- \Gamma \mathbf{x} \quad (6)$$

频域两分量逆变换为

$$\mathbf{z} = \mathbf{F}_G^- \mathbf{x} \triangleq \omega_1^- \mathbf{D} \mathbf{x} + \omega_3^- \Gamma \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (7)$$

且  $\omega_0^- = \frac{e^{-j\theta_0} + e^{-j\theta_1}}{2}$ ， $\omega_1^- = \frac{e^{-j\theta_0} - e^{-j\theta_1}}{2}$ ， $\omega_2^- = \frac{e^{-j\theta_0} - e^{-j\theta_1}}{2}$ ，

$\omega_3^- = \frac{e^{-j\theta_0} + e^{-j\theta_1}}{2}$ 。由于时域和频域两分量的波形设计原理相同，因此本文仅分析基于时域两分量的 DCGWFRFT 的波形设计方法。对于基于频域两分量的 DCGWFRFT 的波形设计方法直接进行类推即可。

### 2.2 DCGWFRFT 的计算分集原理

大规模 MIMO 系统下的 DCGWFRFT 的计算分集原理如图 2 所示。通过 DCGWFRFT 的正变换和

逆变换，可以使波形获得额外的计算分集增益。根据式(3)，第二个时域信号分量  $\omega_2^+ \Gamma \mathbf{x}$  是对信号  $\mathbf{x}$  进行首项不变，其余项倒序排列后再乘以加权系数的操作，因此该信号分量与第一个时域信号分量  $\omega_0^+ \mathbf{x}$  求和后能够将除了第 1 个和第  $\frac{N}{2} + 1$  个符号以外的其他符号的能量分配在 2 个不同的时隙上。

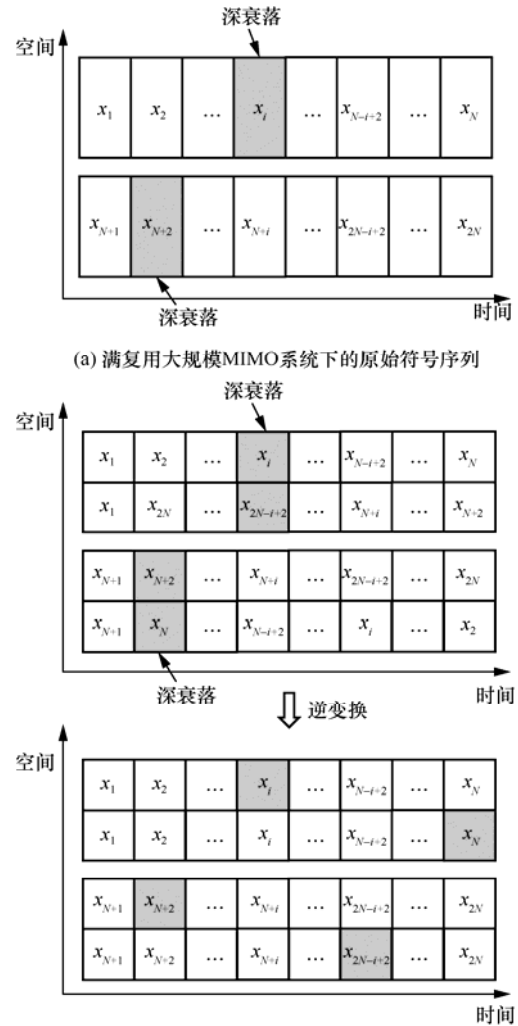


图 2 大规模 MIMO 系统下的 DCGWFRFT 的计算分集原理

原始符号序列如图 2(a)所示。假设  $\mathbf{z}$  的第  $i$  个符号和第  $N+2$  个符号在经过信道时遭遇了深衰落，此时如果没有经过变换，那么这 2 个符号将因为信噪比过低无法达到接收机的灵敏度要求，导致无法正确解调。DCGWFRFT 符号序列如图 2(b)所示。对于 DCGWFRFT 符号序列，由于经过正变换后  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个符号的能量被分配到了  $\mathbf{z}$  的第  $i$  个和第  $2N-i+2$  个符号上，因此即使  $\mathbf{z}$  的第  $i$  个符号遭遇了深衰落，在经过逆变换后  $\mathbf{x}$  的第  $i$  个符号也可以

由“备份”在  $z$  的第  $2N-i+2$  个符号中的部分进行补偿, 实现“计算域”分集。第  $N+2$  个符号同理。虽然经过逆变换后,  $x$  的第  $N$  和第  $2N-i+2$  个符号也受到了衰落的影响, 但是由于正常信号经过轻微衰落很可能仍然满足接收机灵敏度要求, 因此对衰落严重的符号进行补偿的收益是更高的。另外对于大规模 MIMO 系统, 由于同侧不同天线的接收信号经历的衰落在天线间距足够大时是相互独立的, 不同天线在同一时刻的信号很难同时出现深衰落。这一特性保证了计算分集的可行性。

### 2.3 DCGWFRFT 的物理层安全原理

除了抗衰落能力外, 基于 DCGWFRFT 的波形还能提升信号传输的物理层安全性。DCGWFRFT 的物理层安全性来自 GWFRFT 对信号产生的星座旋转、星座裂变和星座模糊效果。具体来说, 信号  $x$  经过 GWFRFT 的正变换后的信号为

$$z = \omega_0^+ x + \omega_1^+ D x + \omega_2^+ F x + \omega_3^+ F D x \quad (8)$$

如果合理设置正变换系数, 那么其时域 2 个信号分量可以将原始信号的星座点位置旋转和裂变, 而其频域 2 个信号分量可以将原始信号的星座点模糊为接近复高斯分布的类噪声信号。因此, 对于基于 DCGWFRFT 的波形, 如果保留了时域的 2 个信号分量, 那么该波形将具有星座旋转和裂变的效果; 而如果保留了频域的 2 个信号分量, 那么该波形将具有星座模糊的效果。

下面通过示例展示 QPSK 调制方式下保留时域 2 个信号分量的 DCGWFRFT 波形的星座旋转和裂变效果, 如图 3 和图 4 所示。假设原始信号  $x = [1, j, -1, -j]^T$ , 参数设为  $\theta_0 = \pi$ ,  $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ , 此时正变换系数为  $\omega_0^+ = \frac{-1-j}{2}$ ,  $\omega_2^+ = \frac{-1+j}{2}$ ,  $x$  经过正变换后的信号为

$$z = \omega_0^+ x + \omega_2^+ F x = [-1, 1, 1, -1]^T \quad (9)$$

可以看到, 经过 DCGWFRFT 后, 原始的 4 个发送符号的星座点位置分别向顺时针方向旋转了  $\pi$ 、 $\frac{-\pi}{2}$ 、 $\pi$  和  $\frac{-\pi}{2}$ , 实现了对信号的伪装。上述的结果只是  $x = [1, j, -1, -j]^T$  的情况, 如果测试所有信号的排列组合, 那么经过变换后信号的星座点集合将从初始的  $\{1, j, -1, -j\}$  变换为  $\{1, j, -1, -j, 1+j, -1+j, 1-j, -1-j, 0\}$ 。此时信号星座点同时呈现裂变效果。如果该信号被窃听方截获,

那么其根据接收信号的星座点位置很可能无法判定发送方的调制方式, 导致错误解调。即使窃听方已知发送方的调制方式, 由于星座点位置被旋转和裂变, 因此解调后的误码率也极高。

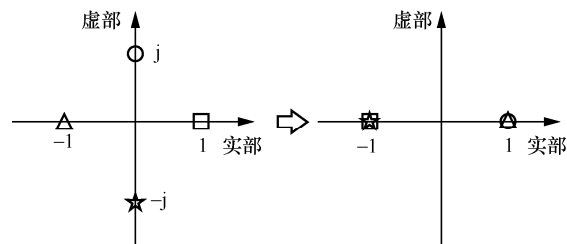
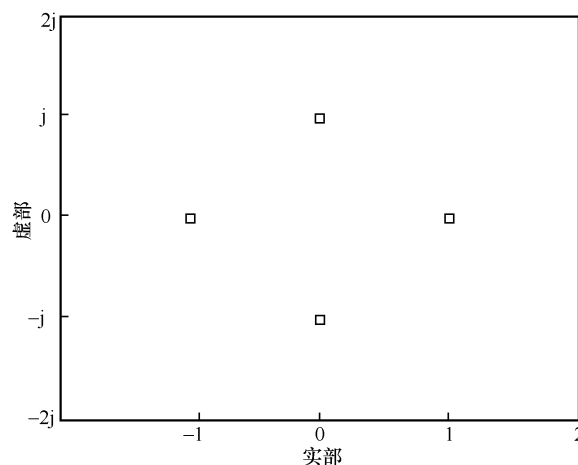
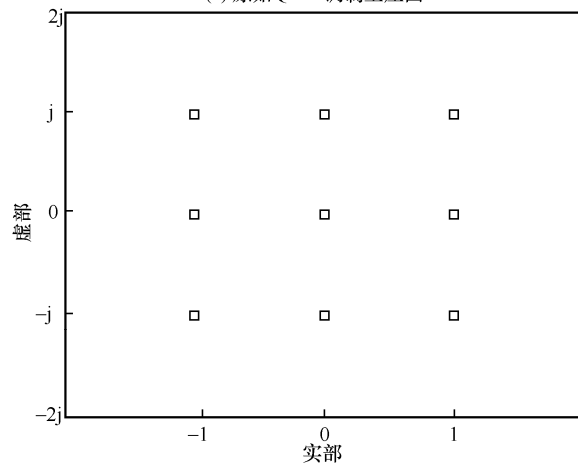


图 3 DCGWFRFT 波形的星座旋转效果



(a) 原始 QPSK 调制星座图



(b) 变换后的波形星座图

图 4 DCGWFRFT 波形的星座裂变效果

### 2.4 基于 DCGWFRFT 的波形设计

利用 DCGWFRFT 的特点, 可以对一段时间内的发送信号波形进行 DCGWFRFT 的正变换, 使之具有计算分集能力。将变换后的波形经过信道发送至接收端, 再由接收端对这一段时间内接收到的波形进行逆变换, 从而恢复原始发送符号。具体来说,

假设发送端发送已调制符号序列  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{MN}$ ，其中  $M$  表示每个变换周期的总时隙个数。首先对该符号序列进行 DCGWFRFT 的正变换，得到波形为

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_G^+ \mathbf{s} = \omega_0^+ \mathbf{s} + \omega_2^+ \mathbf{F} \mathbf{s} \quad (10)$$

将序列  $\mathbf{x}$  平均分为  $M$  个部分，并通过  $M$  个时隙分别发送到接收端，即

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_M^T]^T \quad (11)$$

其中， $\mathbf{x}_i \in \mathbb{C}^N$  表示第  $i$  个时隙的发送符号序列， $i=1, \dots, M$ 。接收端在第  $i$  个时隙的接收信号为

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{n}_i \quad (12)$$

经过 MMSE 信号检测器后的输出信号为

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_i^H \mathbf{y}_i \quad (13)$$

将所有  $M$  个时隙的输出信号进行组合，得到完整输出信号  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{x}}_1^T, \dots, \hat{\mathbf{x}}_M^T]^T$ 。对  $\hat{\mathbf{x}}$  进行 DCGWFRFT 的逆变换，即可得到估计的原始发送信号为

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_G^- \hat{\mathbf{x}} = \omega_0^- \hat{\mathbf{x}} + \omega_2^- \mathbf{F} \hat{\mathbf{x}} \quad (14)$$

最后，将估计的发送信号进行解调即得到接收比特流。基于 DCGWFRFT 的波形设计与变换流程如图 5 所示。注意到不同于接收端能够直接解调每个时隙输出信号的常规波形，基于 DCGWFRFT 的波形需要接收端将  $M$  个时隙的输出信号收集后再统一进行逆变换和解调。

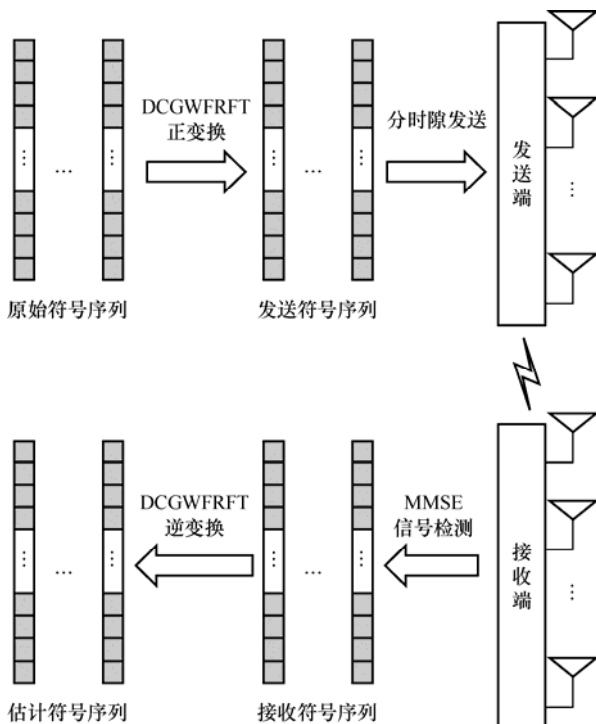


图 5 基于 DCGWFRFT 的波形设计与变换流程

### 3 理论分析

本节将通过数学定理的方式为所提出的基于 DCGWFRFT 的波形设计方法的性能和安全性提供理论保证。首先证明，基于 DCGWFRFT 的波形设计方法在无噪声的条件下能够完美恢复原始发送符号。

**定理 1** 假设无噪声时接收信号  $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{F}_G^+ \mathbf{s}$ ，发送信号  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{MN}$ ，信道  $\mathbf{H} = \text{diag}(\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_M)$  是一个块对角矩阵，这里  $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$  为第  $i$  个时隙的信道矩阵， $i=1, \dots, M$ ；DCGWFRFT 的正变换矩阵为  $\mathbf{F}_G^+ = \omega_0^+ \mathbf{I} + \omega_2^+ \mathbf{F}$ 。如果经过均衡和逆变换后的信号为  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_G^- \mathbf{G} \mathbf{y}$ ，其中，DCGWFRFT 的逆变换矩阵为  $\mathbf{F}_G^- = \omega_0^- \mathbf{I} + \omega_2^- \mathbf{F}$ ，信道均衡矩阵  $\mathbf{G} = \text{diag}(\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_M)$  是一个块对角矩阵，这里  $\mathbf{G}_i = (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^H$  为第  $i$  个时隙的信道均衡矩阵， $i=1, \dots, M$ ，那么最终得到的估计符号与原始符号完全相同，即  $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}$ 。

**证明** 如附录 1 所示。

定理 1 证明了在无噪声的情况下，任意信号经过所提出的基于 DCGWFRFT 的波形设计与变换流程后均可以正确恢复为原始信号。而在有噪声的情况下，定理 2 将从数学期望的角度证明相比于原始信号，基于 DCGWFRFT 的信号的误差项的功率虽然统计平均值保持不变，但具有更小的统计方差，即误差能量的分布更加均匀。

**定理 2** 假设常规波形和 DCGWFRFT 波形的接收信号分别为

$$\hat{\mathbf{s}}_1 = \mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}) \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{F}_G^- \mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{F}_G^+ \mathbf{s} + \mathbf{n}) \quad (16)$$

其中， $\mathbf{s} \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ， $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{F}_G^+$  和  $\mathbf{F}_G^-$  分别为信道矩阵、DCGWFRFT 的正变换矩阵和逆变换矩阵， $\mathbf{n} \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \mathbf{I})$  为复加性白高斯噪声，且与  $\mathbf{s}$  相互独立，信道均衡矩阵  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{MN \times MN}$  是块对角矩阵，表示为

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_M) \quad (17)$$

其中， $\mathbf{W}_i = (\mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i + \sigma_n^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_i^H$  为第  $i$  个时隙的信道均衡矩阵， $i=1, \dots, M$ 。定义

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\hat{\mathbf{s}}_1 - \mathbf{s}) \odot (\hat{\mathbf{s}}_1 - \mathbf{s})^* \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (\hat{\mathbf{s}}_2 - \mathbf{s}) \odot (\hat{\mathbf{s}}_2 - \mathbf{s})^* \quad (19)$$

如果  $M$  为偶数, 那么相比于原始信号波形, 基于 DCGWFRFT 的信号波形的误差项的功率虽然统计平均值保持不变, 但具有更小的统计方差, 即误差能量的分布更加均匀, 即

$$E[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] = E[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] \quad (20)$$

且

$$E[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] > E[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] \quad (21)$$

**证明** 如附录 2 所示。

从定理 2 可以看到, 对于经过 DCGWFRFT 的信号波形, 其误差项的功率  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  虽然统计平均值与原始信号波形序列的误差项的功率  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  的统计平均值相同, 但是其统计方差小于原始符号序列的误差项的功率  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  的统计方差。由于统计方差表征了一个序列偏离其统计平均值的大小, 因此  $\boldsymbol{\varepsilon}_2$  的分布相比于  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  的分布更加靠近统计平均值, 即分布更均匀。综上所述, 定理 2 从理论上证明了 2.2 节中提出的计算分集的可行性, 也间接证明了 DCGWFRFT 波形相比于原始波形在分集性能上的优越性。另外, 定理 2 中“ $M$  为偶数”这个条件是一个充分非必要条件。事实上即使  $M$  为奇数, 式(20)和式(21)也可能成立。不过由于当  $M$  为奇数时条件太过烦琐, 因此在定理 2 中将条件简化为“ $M$  为偶数”。

定理 1 和定理 2 给出了基于 DCGWFRFT 的波形在性能方面的理论保证, 而定理 3 将给出所提出的波形在物理层安全性方面的理论保证。具体来说, 定理 3 将证明 PSK 调制方式的信号在经过 DCGWFRFT 的正变换后, 每个符号的星座点位置相比于原始的星座点位置将产生相位上的旋转效果, 且不同符号的旋转角度不一定相同。

**定理 3** 假设  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$  是一个 PSK 调制符号序列,  $\mathbf{z} = \omega_0^+ \mathbf{x} + \omega_2^+ \Gamma \mathbf{x}$  是经过 DCGWFRFT 的正变换的符号序列, 其中  $\Gamma$ 、 $\omega_0^+$  和  $\omega_2^+$  的定义分别由式(3)和式(7)给出。如果变换系数  $\omega_0^+$  和  $\omega_2^+$  的参数  $\theta_0$  和  $\theta_1$  满足

$$\begin{aligned} \theta_0 &\neq -\arg \left\{ 1 + j + (1 - j)e^{j\frac{2m\pi}{M_0}} \right\} + 2k\pi \\ \theta_1 - \theta_0 &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

或者

$$\begin{aligned} \theta_0 &\neq -\arg \left\{ 1 - j + (1 + j)e^{j\frac{2m\pi}{M_0}} \right\} + 2k\pi \\ \theta_1 - \theta_0 &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

其中,  $m = 0, \dots, M_0 - 1, k$  为整数,  $M_0$  为调制阶数, 例如, 对于 QPSK 调制有  $M_0 = 4$ , 那么有

$$\arg\{z_i\} \neq \arg\{x_i\} \quad (24)$$

即经过 DCGWFRFT 的正变换后, 每个符号星座点的相位均与原始符号星座点的相位不同。

**证明** 如附录 3 所示。

从定理 3 中可以看到, DCGWFRFT 的正变换可以对发送符号的星座点进行旋转操作, 使其相位产生变化, 从而实现信号的伪装效果。定理 3 中限定  $\theta_1 - \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  是因为在这 2 种情况下该波形能够达到最优的误码率性能, 这一结论可以由后续的仿真结果证实。需要指出的是, 如果不限定  $\theta_1 - \theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$  同样可以实现星座点旋转, 但是误码率性能会下降, 且参数  $\theta_0$  的限制条件更烦琐, 因此不再讨论。另外, 定理 3 虽然仅证明了 PSK 调制方式下的星座旋转效果, 但是现有结果表明对于其他调制方式利用 GWFRFT 及其扩展变换技术同样可以实现星座旋转效果<sup>[26]</sup>。为了具体地展示参数  $\theta_0$  的取值空间, 下面给出 QPSK 调制方式下的  $\theta_0$  取值范围, 如表 1 所示。

表 1 QPSK 调制方式下  $\theta_0$  的取值范围

$\theta_1 - \theta_0$	$\theta_0$
$\frac{\pi}{2}$	$\theta_0 \neq 2k\pi, \theta_0 \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \theta_0 \neq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$
$-\frac{\pi}{2}$	$\theta_0 \neq 2k\pi, \theta_0 \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \theta_0 \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

## 4 仿真分析

### 4.1 算法性能分析

下面给出本文所提出的基于 DCGWFRFT 的波形设计方法的仿真分析。仿真场景假设为基站到单用户的大规模 MIMO 下行通信场景, 如图 6 所示。仿真中均假设天线数  $N = 16$  根。信道矩阵  $\mathbf{H}_i$  根据瑞利信道模型产生, 即  $\mathbf{H}_i$  的各项相互独立且均服从均值为 0、方差为 1 的复高斯分布。假设信道  $\mathbf{H}_i$  每隔 500 个时隙更新一次, 共发送  $M = 5000$  个时隙。对于本文提出的波形设计方法, 除了图 14 之外, 其他仿真中均设置参数  $\theta_0 = \pi, \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$ 。

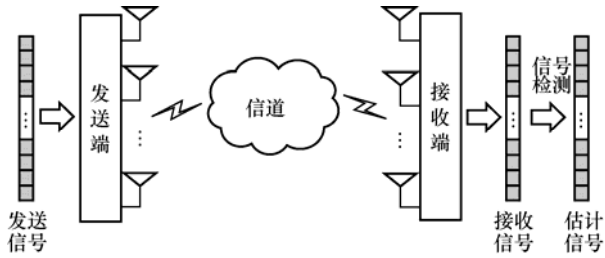


图 6 基站到单用户的大规模 MIMO 下行通信场景

图 7 通过蒙特卡罗模拟的方式给出了不同波形的误差项功率统计方差的期望与比特信噪比  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系，调制方式为 QPSK。从图 7 中可以看到，基于 DCGWFRFT 的波形的误差项功率在比特信噪比相同时具有更小的统计方差，即误差项功率的分布更均匀。该结果从仿真的角度证明了本文提出的定理 2 的正确性，即从仿真上证明了 2.2 节中提出的计算分集的可行性。

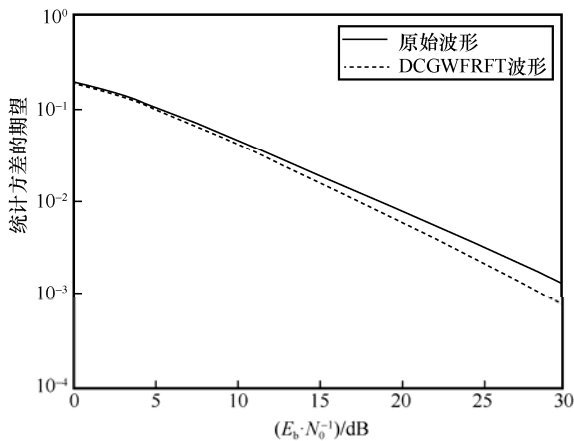


图 7 不同波形的误差项功率统计方差与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系

为了验证本文提出的波形设计方法（记为“DCGWFRFT 波形”）的性能，首先将其与未经变换的单载波波形（记为“原始波形”）、OFDM 波形，以及基于 MP-WFRFT 技术的混合载波波形<sup>[26]</sup>、MP-WFRFT 波形<sup>[27]</sup>进行对比。需要指出的是，OFDM 波形和 MP-WFRFT 波形需要在频域使用额外的频谱资源，本文所提出的时域两分量波形只需要使用单载波系统进行通信。如果将本文提出的波形应用在多载波系统中，还可以使用频域两分量的 DCGWFRFT 波形进行抗衰落。

图 8~图 10 分别给出了 BPSK、QPSK 和 8PSK 这 3 种调制方式下不同波形的误码率比特信噪比的

关系。从图 8~图 10 中可以看到，相比于原始波形或者 OFDM 波形，当调制方式为 BPSK 时，DCGWFRFT 波形在误码率达到  $10^{-3}$  时所需的比特信噪比能够降低 1.7 dB；当调制方式为 QPSK 时，DCGWFRFT 波形在误码率达到  $10^{-3}$  时所需的比特信噪比能够降低 2.9 dB；当调制方式为 8PSK 时，DCGWFRFT 波形在误码率达到  $10^{-3}$  时所需的比特信噪比能够降低 3.1 dB。这一提升是由于本文提出的信号变换方式在传输时将符号能量分散在了 2 个不同的时隙和天线上，通过这种“备份”的方式减缓信道衰落对接收信噪比的影响，从而降低误码率。该结果也证实了本文所提出的计算分集的可行性。而相比于 MP-WFRFT 波形，DCGWFRFT 波形在误码率达到  $10^{-3}$  时所需的比特信噪比也可以降低至少 0.7 dB。该结果表明，DCGWFRFT 波形可以在不损失数据速率的条件下提升系统的分集性能。

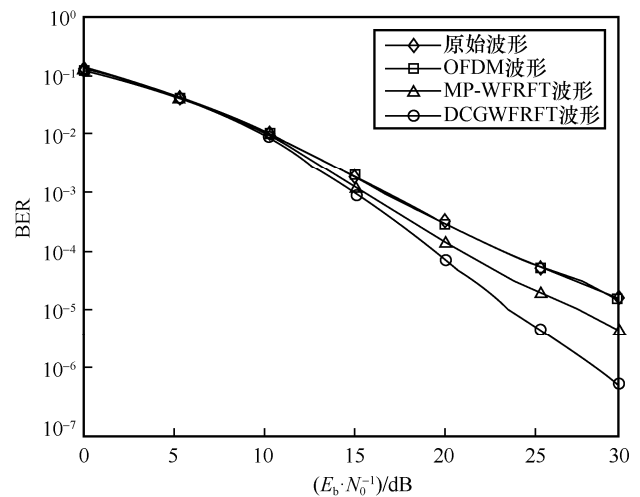


图 8 不同波形的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  关系 (BPSK 调制)

除了传统的分集编码技术外，近年来提出的预编码技术也能够降低误码率或提升信道容量。为了充分展示本文提出的波形设计方法的性能，本文将 DCGWFRFT 波形与提升信道容量的 SVD 线性预编码<sup>[15]</sup>和基于 GMD-VBLAST 非线性预编码<sup>[17]</sup>进行了仿真对比。由于本文所提出的 DCGWFRFT 波形是一种普适性的方法，可以与上述 2 种预编码方法结合，因此还给出了与上述 2 种方法结合后的波形设计仿真性能（分别记为“SVD+DCGWFRFT”和“GMD-VBLAST+DCGWFRFT”）。

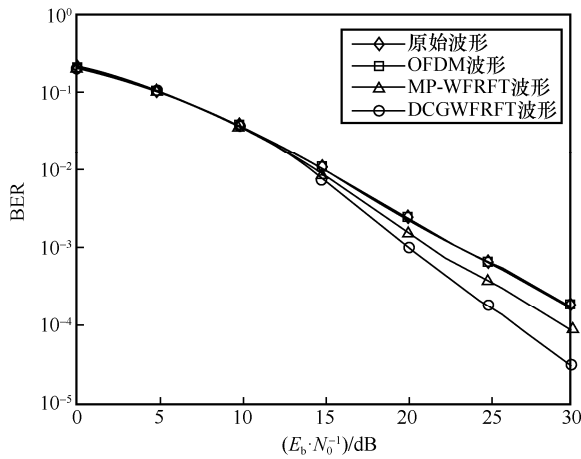


图9 不同波形的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系 (QPSK 调制)

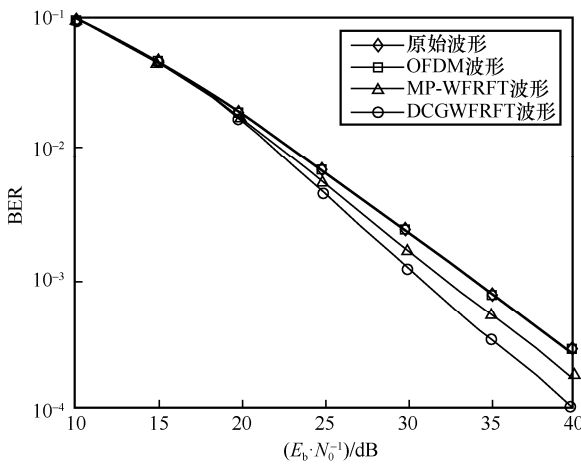


图10 不同波形的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系 (8PSK 调制)

图 11 和图 12 分别展示了 BPSK 和 QPSK 调制方式下不同方法的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系。可以看

到 SVD 预编码方法会显著增加通信的误码率,这是因为该方法为了最大化频谱效率在发送端进行了功率分配,导致部分数据流的误码率恶化。但是如果与本文所提出的 DCGWFRFT 波形设计方法相结合,那么可以在不损失通信速率的前提下降低误码率。GMD-VBLAST 非线性预编码方法的误码率性能最好。而本文提出的 DCGWFRFT 波形与 GMD-VBLAST 预编码方法结合后虽然误码率性能优于其他方法,但是与单独使用 GMD-VBLAST 的性能存在一定差距。这是因为本文提出的波形设计方法在经过波形变换后会对信号星座点产生“星座裂变”效果,即变换后的波

形星座点个数会增加,如图 4 所示。由于信号的平均功率在经过变换后并未改变,因此星座点个数的增加将导致不同星座点之间的平均欧氏距离减小,导致非线性信号检测过程出现误差传播现象,从而降低误码率。

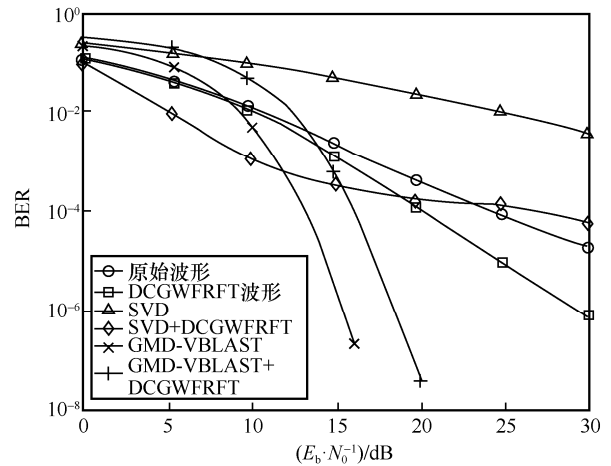


图11 不同方法的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系 (BPSK 调制)

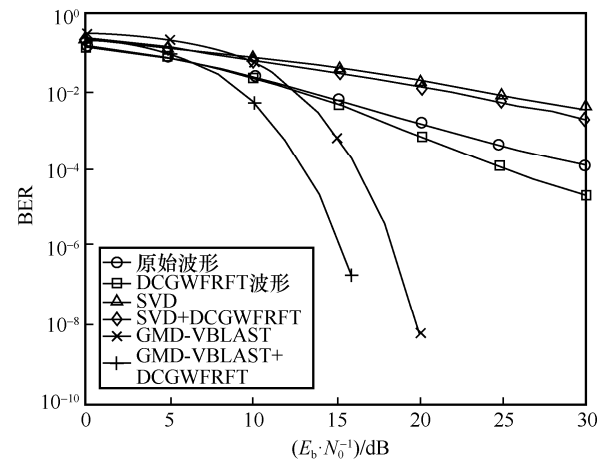


图12 不同方法的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系 (QPSK 调制)

毫米波/太赫兹通信技术是当前 5G 及未来 6G 中的关键技术之一<sup>[3]</sup>。为了说明本文提出的波形设计方法的先进性,将其与毫米波大规模 MIMO 联合预编码/合并预编码设计 (JHPC) 方法<sup>[32]</sup>和模拟预编码设计 (Analog) 方法<sup>[33]</sup>进行对比。另外,由于本文提出的波形设计方法可以与这 2 种方法组合使用,将组合后的方法分别记为 JHPC+DCGWFRFT 和 Analog+DCGWFRFT,因此同样给出了这 2 种方法与本文方法结合后的性能。

图 13 展示了 QPSK 调制方式下不同方法的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系。从图 13 可以看到，对于毫米波

大规模 MIMO 通信系统，如果不使用信道状态信息进行预编码，那么误码率性能非常差，即使引入了计算分集也没有得到很好的改善。而在使用信道状态信息后，JHPC 方法虽然能够大幅降低误码率，但是如果与本文的 DCGWFRFT 波形设计方法相结合，那么可以在不损失通信速率的前提下进一步降低误码率，且当误码率为  $10^{-3}$  时所需的  $\frac{E_b}{N_0}$  降低了

约 2 dB。同样，Analog+DCGWFRFT 方法在  $\frac{E_b}{N_0}$  超过 16 dB 后也能够在不损失通信速率的前提下获得更低的误码率。

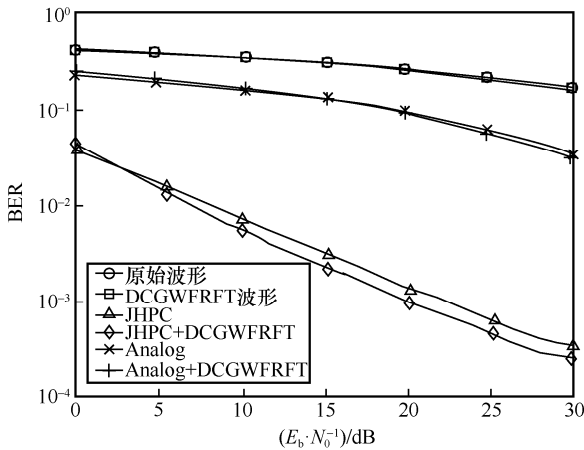


图 13 不同方法的误码率与  $\frac{E_b}{N_0}$  的关系 (QPSK 调制)

为了验证不同参数设置对误码率的影响，图 14 给出了 QPSK 调制方式下不同波形的误码率与变换参数差值  $\alpha = |\theta_1 - \theta_0|$  的关系曲线，其中比特信噪比为 10 dB。注意到由于参数  $\theta_0$  和  $\theta_1$  均以  $2\pi$  为周期，因此图 14 中只给出了一个周期内的性能曲线。

从图 14 中可以看到，当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  或  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  时，DCGWFRFT 波形性能达到最优；而当  $\alpha = 0$  或  $\alpha = \pi$  时，DCGWFRFT 波形性能与原始波形性能相同。事实上，当  $\alpha = 0$  或  $\alpha = \pi$  时，DCGWFRFT 波形将退化为原始波形或原始波形的时间反转。图 14 的仿真结果表明， $\alpha = \frac{\pi}{2}$  或  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  是最佳的参数设置。

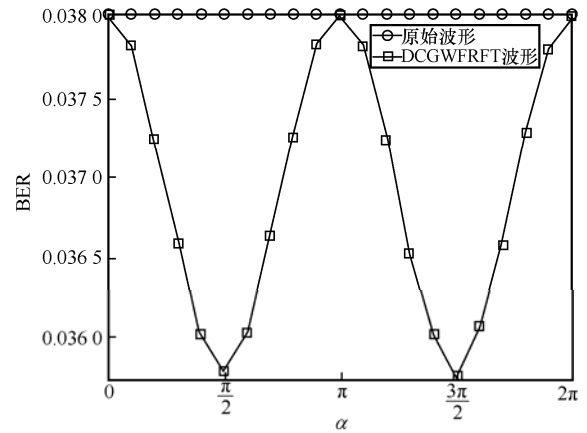


图 14 不同波形的误码率与变换参数差值的关系曲线 (QPSK 调制)

### 4.2 计算复杂度分析

下面分别从理论分析和仿真测试角度对不同方法的计算复杂度进行对比。原始波形方法只需要在接收端进行 MMSE 信号检测，而 MMSE 信号检测的计算复杂度为  $O(N^3)$ ，其中  $N$  为接收端天线数，因此每次信号处理的计算复杂度为  $O(N^3)$ ，发送整个符号序列  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{M \times N}$  的计算复杂度为  $O(MN^3)$ 。

DCGWFRFT 波形方法首先在发送端对长度为  $MN$  的信号进行倒序排列并与原始信号加权求和，复杂度为  $O(MN)$ 。将序列平均分为  $M$  个部分，并通过  $M$  个时隙发送到接收端后分别进行 MMSE 信号检测，每次计算复杂度为  $O(N^3)$ ， $M$  个部分的复杂度为  $O(MN^3)$ 。最后对信号进行逆变换，同样对长度为  $MN$  的信号进行倒序排列并与原始信号加权求和，复杂度为  $O(MN)$ ，因此总计算复杂度为  $O(MN^3 + 2MN)$ 。注意到当天线数  $N$  较多时， $2MN$  相比于  $MN^3$  对计算复杂度的影响几乎可以忽略，因此该方法与原始波形的计算复杂度几乎相同。

SVD 预编码方法首先需要对信道矩阵进行 SVD 分解，之后在接收端进行 MMSE 信号检测。因此总计算复杂度为  $O(2MN^3)$ 。类似地，可以得到 SVD+DCGWFRFT 方法计算复杂度为  $O(2MN^3 + 2MN)$ 。同样由于  $2MN$  相比于  $2MN^3$  对计算复杂度的影响几乎可以忽略，因此该方法与 SVD 预编码方法的计算复杂度几乎相同。

GMD-VBLAST 方法首先需要对信道矩阵进行 SVD 分解，再对信道矩阵进行 GMD 分解，最后接收端对信号进行 VBLAST 检测，总计算复杂度为  $O(2MN^3 + (K_1 + 2)MN^2)$ ，其中  $K_1$  表示原始信号的星座点个数，例如对于 QPSK 调制有  $K_1 = 4$ 。

GMD-VBLAST+DCGWFRFT 方法的计算复杂度为  $O(2MN^3 + (K_2 + 2)MN^2 + 2MN)$ ，其中  $K_2$  表示变换后的信号星座点个数，例如对于 QPSK 调制，经过变换后由于出现“星座裂变”现象，因此有  $K_2 = 9$ ，如图 4 所示。此时由于  $K_2N^2$  对整体的计算复杂度影响不可忽略，因此该方法的计算复杂度高于 GMD-VBLAST 方法。不同方法的计算复杂度列表如表 2 所示。

方法	计算复杂度
原始波形	$O(MN^3)$
DCGWFRFT 波形	$O(MN^3 + 2MN)$
SVD	$O(2MN^3)$
SVD+DCGWFRFT	$O(2MN^3 + 2MN)$
GMD-VBLAST	$O(2MN^3 + (K_1 + 2)MN^2)$
GMD-VBLAST+DCGWFRFT	$O(2MN^3 + (K_2 + 2)MN^2 + 2MN)$

下面从仿真角度测试不同方法的计算复杂度。不同方法的平均运行时间如图 15 所示，调制方式为 QPSK，天线数  $N = 16$ ，每个变换周期包含  $M = 100$  个时隙。可以看到，不同方法的实际运行时间与理论分析的结果非常吻合，即本文提出的波形设计方法相比于原始波形在计算复杂度方面增加很低，与 SVD 结合时相比于原始的 SVD 同样几乎不增加计算复杂度，只有在与 GMD-VBLAST 结合时由于需要使用非线性信号检测，导致计算复杂度有一定增加，但仍然在同一个数量级。

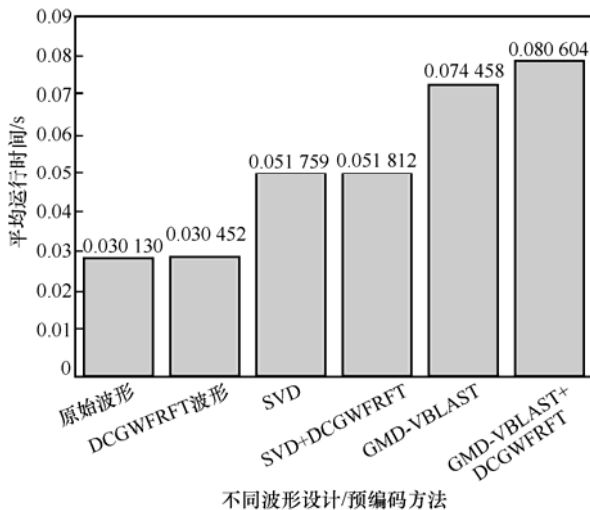


图 15 不同方法的平均运行时间

## 5 结束语

本文研究了大规模 MIMO 系统下的抗衰落波形设计问题。针对传统抗衰落波形需要牺牲速率或频谱等重要通信资源的缺陷，提出利用计算域的资源提升系统的分集性能，并设计了一种基于 DCGWFRFT 的波形以及信号变换流程，在保持物理层安全特性的基础上提升波形的抗衰落能力，且发送端不需要信道状态信息。理论分析表明，在无噪声的情况下，所提出的波形变换流程能够完美恢复原始发送符号；而在有噪声的情况下，所提出的波形相比于未进行变换的波形的误差能量分布更加平均。仿真结果显示，在误码率均达到  $10^{-3}$  时，基于 DCGWFRFT 的信号波形所需的比特信噪比相比于未经变换的信号波形所需的比特信噪比具有至少 1.7 dB 的性能优势。

## 附录 1 定理 1 证明

根据定义可得

$$\hat{s} = F_G^- G H F_G^+ s \quad (25)$$

下面证明  $F_G^- G H F_G^+ = I$ 。因为

$$G_i H_i = (H_i^H H_i)^{-1} H_i^H H_i = I, \quad i = 1, \dots, M \quad (26)$$

于是

$$F_G^- G H F_G^+ = (\omega_0^- \omega_0^+ + \omega_2^- \omega_2^+) I + (\omega_0^- \omega_2^+ + \omega_2^- \omega_0^+) \Gamma \quad (27)$$

根据定义得到

$$\omega_0^- \omega_0^+ + \omega_2^- \omega_2^+ = 1 \quad (28)$$

$$\omega_0^- \omega_2^+ + \omega_2^- \omega_0^+ = 0 \quad (29)$$

因此  $F_G^- G H F_G^+ = I$ 。

证毕。

## 附录 2 定理 2 证明

定义

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_M) \quad (30)$$

其中， $A_i = W_i H_i - I$ 。假设  $H_i$  的奇异值分解表达式为

$$H_i = U_i D_i V_i^H \quad (31)$$

其中， $D_i = \text{diag}(d_{i,1}, \dots, d_{i,N})$  表示对角元分别为  $d_{i,1}, \dots, d_{i,N}$  的对角矩阵， $d_{i,n} \in \mathbb{R}$ ， $n = 1, \dots, N$ ， $U_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$  和  $V_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$  均为酉矩阵。此时

$$A_i = V_i (D_i^2 + \sigma_n^2 I)^{-1} D_i^2 V_i^H - I \quad (32)$$

定义

$$\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{s}}_1 - \mathbf{s}, \mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{s}}_2 - \mathbf{s} \quad (33)$$

注意到  $\mathbf{W}\mathbf{H} - \mathbf{I} = \mathbf{A}$ , 于是

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{W}\mathbf{n}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_G^- \mathbf{A} \mathbf{F}_G^+ \mathbf{s} + \mathbf{F}_G^- \mathbf{W}\mathbf{n} \quad (34)$$

首先证明

$$\mathbb{E}[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] = \mathbb{E}[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] \quad (35)$$

因为

$$\mathbb{E}[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^{MN} \varepsilon_1(i)\right] = \frac{\sigma_n^2}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{d_{i,n}^2 + \sigma_n^2} \quad (36)$$

且

$$\mathbb{E}[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^{MN} \varepsilon_2(i)\right] = \frac{\sigma_n^2}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{n=1}^N \frac{1}{d_{i,n}^2 + \sigma_n^2} \quad (37)$$

因此

$$\mathbb{E}[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] = \mathbb{E}[\text{Mean}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] \quad (38)$$

其次证明

$$\mathbb{E}[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] \geq \mathbb{E}[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] \quad (39)$$

因为

$$\mathbb{E}[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] = \frac{\sum_{i=1}^{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_1^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_1\right] - \frac{1}{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1\right]}{MN-1} \quad (40)$$

且

$$\mathbb{E}[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] = \frac{\sum_{i=1}^{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_2^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_2\right] - \frac{1}{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2\right]}{MN-1} \quad (41)$$

其中,  $\mathbf{J}_{m,n}$  表示第  $m$  行第  $n$  列的项为 1, 其余项均为 0 的矩阵。定义

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \mathbf{A}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{W}\mathbf{W}^H, \boldsymbol{\Phi}_2 = \mathbf{F}_G^- \boldsymbol{\Phi}_1 (\mathbf{F}_G^-)^H \quad (42)$$

注意到

$$\mathbf{r}_1 \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_1), \mathbf{r}_2 \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}_2) \quad (43)$$

因此

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_1^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_1\right] - \frac{1}{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^H \mathbf{r}_1\right] = \\ & 3 \sum_{i=1}^{MN} \Phi_1^2(i,i) - \frac{1}{MN} \left(2\text{tr}\{\boldsymbol{\Phi}_1^2\} + \text{tr}^2\{\boldsymbol{\Phi}_1\}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

且

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_2^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^H \mathbf{J}_{i,i} \mathbf{r}_2\right] - \frac{1}{MN} \mathbb{E}\left[\mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^H \mathbf{r}_2\right] = \\ & 3 \sum_{i=1}^{MN} \Phi_2^2(i,i) - \frac{1}{MN} \left(2\text{tr}\{\boldsymbol{\Phi}_1^2\} + \text{tr}^2\{\boldsymbol{\Phi}_1\}\right) \end{aligned} \quad (45)$$

由于

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_2 &= \mathbf{F}_G^- \boldsymbol{\Phi}_1 (\mathbf{F}_G^-)^H = \left(\omega_0^- \mathbf{I} + \omega_2^- \boldsymbol{\Gamma}\right) \boldsymbol{\Phi}_1 \left(\omega_0^+ \mathbf{I} + \omega_2^+ \boldsymbol{\Gamma}\right) = \\ & \left|\omega_0^+\right|^2 \boldsymbol{\Phi}_1 + \omega_0^- \omega_2^+ \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\Gamma} + \omega_2^- \omega_0^+ \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Phi}_1 + \left|\omega_2^+\right|^2 \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\Gamma} \end{aligned} \quad (46)$$

因此

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{MN} \Phi_2^2(i,i) = \Phi_1(1,1)^2 + \Phi_1\left(\frac{MN}{2} + 1, \frac{MN}{2+1}\right)^2 + \\ & \sum_{i=2, i \neq \frac{MN}{2+1}}^{MN} \left[ \left|\omega_0^+\right|^2 \Phi_1(i,i) + \left|\omega_2^+\right|^2 \cdot \right. \\ & \left. \Phi_1(MN-i+2, MN-i+2) + \right. \\ & \left. 2\text{Re}\left\{\omega_0^- \omega_2^+ \Phi_1(i, MN-i+2)\right\} \right]^2 \end{aligned} \quad (47)$$

其中,  $\text{Re}\{\cdot\}$  表示取实部运算。因为

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \text{diag}\left(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1^H, \dots, \mathbf{A}_M \mathbf{A}_M^H\right) \quad (48)$$

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^H = \text{diag}\left(\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^H, \dots, \mathbf{W}_M \mathbf{W}_M^H\right) \quad (49)$$

且  $\boldsymbol{\Phi}_1 = \mathbf{A}\mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{W}\mathbf{W}^H$ , 所以当  $M$  为偶数、 $i \neq 1$  且  $i \neq \frac{MN}{2} + 1$  时必然有  $\Phi_1(i, MN-i+2) = 0$ 。此外注意到

$\left|\omega_0^+\right|^4 + \left|\omega_2^+\right|^4 = 1 - 2\left|\omega_0^+\right|^2 \left|\omega_2^+\right|^2$ , 故有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{MN} \Phi_2^2(i,i) = \sum_{i=1}^{MN} \Phi_1^2(i,i) - 2\left|\omega_0^+ \omega_2^+\right|^2 \\ & \sum_{i=2, i \neq \frac{MN}{2+1}}^{MN} \rho_i^2 \leq \sum_{i=1}^{MN} \Phi_1^2(i,i) \end{aligned} \quad (50)$$

其中,  $\rho_i \triangleq \Phi_1(i,i) - \Phi_1(MN-i+2, MN-i+2)$ 。综上所述,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)] = \\ & \frac{1}{MN-1} \left( 3 \sum_{i=1}^{MN} \Phi_1^2(i,i) - \frac{1}{MN} \left( 2\text{tr}\{\boldsymbol{\Phi}_1^2\} + \text{tr}^2\{\boldsymbol{\Phi}_1\} \right) \right) \geq \\ & \frac{1}{MN-1} \left( 3 \sum_{i=1}^{MN} \Phi_2^2(i,i) - \frac{1}{MN} \left( 2\text{tr}\{\boldsymbol{\Phi}_1^2\} + \text{tr}^2\{\boldsymbol{\Phi}_1\} \right) \right) = \\ & \mathbb{E}[\text{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)] \end{aligned} \quad (51)$$

证毕。

### 附录 3 定理 3 证明

对于 MPSK 信号  $\mathbf{x}$ , 其第  $i$  个元素  $x_i$  满足

$$x_i = e^{j\frac{2m\pi}{M_0}} \quad (52)$$

其中,  $m=0, \dots, M_0-1$ 。因此, 经过 DCGWFRFT 的信号  $z$  的第  $i$  个元素  $z_i$  为

$$z_i = \begin{cases} \omega_0^+ x_1 + \omega_2^+ x_1 & i=1 \\ \omega_0^+ x_i + \omega_2^+ x_{N-i+2} & \text{其他} \end{cases} \quad (53)$$

无论上述何种情况,  $z_i$  均能表示为

$$z_i = \frac{1}{2}(e^{j\theta_0} + e^{j\theta_1})e^{j\frac{2\pi}{M_0}k} + \frac{1}{2}(e^{j\theta_0} - e^{j\theta_1})e^{j\frac{2\pi}{M_0}l} = \frac{1}{2} \left( e^{j\theta_0} e^{j\frac{2\pi}{M_0}k} + e^{j\theta_1} e^{j\frac{2\pi}{M_0}k} + e^{j\theta_0} e^{j\frac{2\pi}{M_0}l} - e^{j\theta_1} e^{j\frac{2\pi}{M_0}l} \right) \quad (54)$$

其中,  $k, l=0, \dots, M_0-1$ 。因此,  $z_i$  和  $x_i$  的相位差为

$$\arg\{z_i\} - \arg\{x_i\} = \frac{1}{2} e^{j\theta_0} \left( 1 + e^{j(\theta_1 - \theta_0)} + e^{j\frac{2\pi}{M_0}m} - e^{j(\theta_1 - \theta_0)} e^{j\frac{2\pi}{M_0}m} \right) \quad (55)$$

其中,  $m=0, \dots, M_0-1$ 。当  $\theta_1 - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$  时, 有

$$\arg\{z_i\} - \arg\{x_i\} = \frac{1}{2} e^{j\theta_0} \left( 1 + j + (1-j)e^{j\frac{2\pi}{M_0}m} \right) \quad (56)$$

因此, 如果

$$\theta_0 \neq -\arg\left\{1 + j + (1-j)e^{j\frac{2\pi}{M_0}m}\right\} + 2k\pi \quad (57)$$

其中,  $k$  为整数, 那么  $\arg\{z_i\} \neq \arg\{x_i\}$ 。而当  $\theta_1 - \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$

时, 有

$$\arg\{z_i\} - \arg\{x_i\} = \frac{1}{2} e^{j\theta_0} \left( 1 - j + (1+j)e^{j\frac{2\pi}{M_0}m} \right) \quad (58)$$

同理, 如果

$$\theta_0 \neq -\arg\left\{1 - j + (1+j)e^{j\frac{2\pi}{M_0}m}\right\} + 2k\pi \quad (59)$$

那么  $\arg\{z_i\} \neq \arg\{x_i\}$ 。

证毕。

参考文献:

[1] MARZETTA T L. Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2010, 9(11): 3590-3600.  
 [2] 种璟, 唐小勇, 朱磊, 等. 5G 关键技术演进方向与行业发展趋势[J]. 电信科学, 2022, 38(5): 124-135.  
 CHONG J, TANG X Y, ZHU L, et al. Evolution and industry trend of

5G key technologies[J]. Telecommunications Science, 2022, 38(5): 124-135.  
 [3] 范敏, 邵思源, 贺超, 等. 下一代毫米波无线局域网: 愿景与关键使能技术[J]. 物联网学报, 2023, 7(3): 1-14.  
 FAN M, SHAO S Y, HE C, et al. Next-generation mmWave WLAN: vision and key enabling technologies[J]. Chinese Journal on Internet of Things, 2023, 7(3): 1-14.  
 [4] HU C, DAI L L, HAN S F, et al. Two-timescale channel estimation for reconfigurable intelligent surface aided wireless communications[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(11): 7736-7747.  
 [5] MEDLES A, SLOCK D T M. Achieving the optimal diversity-versus-multiplexing tradeoff for MIMO flat channels with QAM space-time spreading and DFE equalization[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5312-5323.  
 [6] ZHENG L Z, TSE D N C. Diversity and multiplexing: a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(5): 1073-1096.  
 [7] SHANG Y, XIA X G. Space-time block codes achieving full diversity with linear receivers[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(10): 4528-4547.  
 [8] WANG H, XIA X G, YIN Q, et al. A family of space-time block codes achieving full diversity with linear receivers[J]. IEEE Transactions on Communications, 2009, 57(12): 3607-3617.  
 [9] MENG X, XIA X G, GAO X Q. Omnidirectional space-time block coding for common information broadcasting in massive MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2018, 17(3): 1407-1417.  
 [10] ALAMOUTI S M. A simple transmit diversity technique for wireless communications[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 1998, 16(8): 1451-1458.  
 [11] ALBREEM M A, HABBASH A H A, ABU-HUDROUSS A M, et al. Overview of precoding techniques for massive MIMO[J]. IEEE Access, 2021, 9: 60764-60801.  
 [12] FATEMA N, HUA G, XIANG Y, et al. Massive MIMO linear precoding: a survey[J]. IEEE Systems Journal, 2018, 12(4): 3920-3931.  
 [13] LI A, SPANO D, KRIVCHIZA J, et al. A tutorial on interference exploitation via symbol-level precoding: overview, state-of-the-art and future directions[J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2020, 22(2): 796-839.  
 [14] LU H F. Optimal sum rate-fairness tradeoff for MIMO downlink communications employing successive zero forcing dirty paper coding[J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(3): 783-787.  
 [15] ALKHATEEB A, HEATH R W. Frequency selective hybrid precoding for limited feedback millimeter wave systems[J]. IEEE Transactions on Communications, 2016, 64(5): 1801-1818.  
 [16] JIANG Y, LI J, HAGER W W. Joint transceiver design for MIMO communications using geometric mean decomposition[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(10): 3791-3803.  
 [17] XIE T, DAI L L, GAO X Y, et al. Geometric mean decomposition based hybrid precoding for millimeter-wave massive MIMO[J]. China Communications, 2018, 15(5): 229-238.  
 [18] KUSUME K, JOHAM M, UTSCHICK W, et al. Efficient Tomlinson-Harashima precoding for spatial multiplexing on flat MIMO channel[C]//Proceedings of IEEE International Conference on Communications. Piscataway: IEEE Press, 2005: 2021-2025.  
 [19] MASOUIROS C, SELLATHURAI M, RATNARAJAH T. Computa-

tionally efficient vector perturbation precoding using thresholded optimization[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(5): 1880-1890.

- [20] TRAN L N, JUNTTI M, BENGTSOON M, et al. Weighted sum rate maximization for MIMO broadcast channels using dirty paper coding and zero-forcing methods[J]. IEEE Transactions on Communications, 2013, 61(6): 2362-2373.
- [21] SHIH C C. Fractionalization of Fourier transform[J]. Optics Communications, 1995, 118(5/6): 495-498.
- [22] MEI L, SHA X J, ZHANG N T. The approach to carrier scheme convergence based on 4-weighted fractional Fourier transform[J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(6): 503-505.
- [23] FANG X J, SHA X J, MEI L. Guaranteeing wireless communication secrecy via a WFRFT-based cooperative system[J]. China Communications, 2015, 12(9): 76-82.
- [24] FANG X J, ZHANG N, ZHANG S, et al. On physical layer security: weighted fractional Fourier transform based user cooperation[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2017, 16(8): 5498-5510.
- [25] 李勇, 宋志群, 王斌, 等. 基于 M-WFRFT 的物理层安全传输技术[J]. 无线电通信技术, 2021, 47(3): 319-323.  
LI Y, SONG Z Q, WANG B, et al. Physical layer security technology based upon M-WFRFT[J]. Radio Communications Technology, 2021, 47(3): 319-323.
- [26] FANG X J, SHA X J, LI Y. MP-WFRFT and constellation scrambling based physical layer security system[J]. China Communications, 2016, 13(2): 138-145.
- [27] YANG Y X, GAO P, JIANG B. MP-WFRFT signal design method based on joint optimization of target signal and key parameters[C]//Proceedings of 2021 International Conference on Electronic Information Engineering and Computer Science (EIECS). Piscataway: IEEE Press, 2021: 63-69.
- [28] MA C, SHA X J, MEI L, et al. An equal component power-based generalized hybrid carrier system[J]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(2): 378-381.
- [29] 赵子涛, 宋志群, 倪嘉昊, 等. 基于扩展加权分数阶傅里叶变换的移动通信系统研究[J]. 北京交通大学学报, 2022, 46(2): 108-117.  
ZHAO Z T, SONG Z Q, NI J H, et al. Research on mobile communication system based on extended weighted-type fractional Fourier transform[J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2022, 46(2): 108-117.
- [30] 马聪, 沙学军, 张宇思. 广义加权分数傅里叶变换两分量组合抗衰落技术[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2020, 52(10): 111-118.  
MA C, SHA X J, ZHANG Y S. Double-component combined anti-fading technique based on GWFRFT[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2020, 52(10): 111-118.
- [31] FENG Y Q, SHA X J, LI Y, et al. Time-domain dual component computation diversity based on generalized hybrid carrier[J]. China Communications, 2021, 18(10): 148-157.
- [32] WANG S G, LI Z T, HE M Y, et al. A joint hybrid precoding/combining scheme based on equivalent channel for massive MIMO systems[J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2022, 40(10): 2882-2893.
- [33] NOURI M, BEHROOZI H, BASTAMI H, et al. Hybrid precoding based on active learning for mmWave massive MIMO communication systems[J]. IEEE Transactions on Communications, 2023, 71(5): 3043-3058.

## [作者简介]



**李行健** (1992- ), 男, 甘肃兰州人, 博士, 中国电科网络通信研究院工程师, 主要研究方向为无线通信、大规模 MIMO 技术等。



**宋志群** (1963- ), 男, 河北秦皇岛人, 博士, 中国电科网络通信研究院研究员, 主要研究方向为无线通信、5G 等。



**李勇** (1985- ), 男, 河北石家庄人, 博士, 中国电科网络通信研究院研究员, 主要研究方向为通信系统与信号处理技术。



**刘丽哲** (1978- ), 女, 河北石家庄人, 中国电科网络通信研究院研究员, 主要研究方向为无线通信、信号处理技术等。



**王斌** (1968- ), 男, 河北石家庄人, 中国电科网络通信研究院研究员, 主要研究方向为通信系统与信号处理技术等。



**汪畅** (1995- ), 男, 安徽宿州人, 中国电科网络通信研究院工程师, 主要研究方向为无线通信、信号处理技术等。