

基于多角度和 RY 辅助结构的改进 QAOA

叶天语^{1,2}, 马鹏辉¹, 甘志刚¹

(1. 浙江工商大学信息与电子工程学院, 浙江 杭州 310018; 2. 赤峰工业职业技术学院, 内蒙古 赤峰 024000)

摘要: 针对标准量子近似优化算法 (QAOA) 在浅层电路下表达能力不足, 而增加线路深度又易引入噪声的问题, 提出一种融合参数多角度化与 RY 辅助结构的改进量子近似优化算法 (MA-RY-QAOA)。该算法在问题层引入边参数多角度化和 RY 扩展, 并在混合层实现量子比特参数多角度化。针对随机图、完全图、2-正则图和 4-正则图的最大割问题, 在层数 $p = 1$ 、节点数 $n=4 \sim 12$ 的条件下进行仿真实验, 并以平均逼近率作为评价指标。结果表明, MA-RY-QAOA 与 MA-QAOA 的平均逼近率总体优于标准 QAOA、RY-QAOA 和 QAOA+; 其中, MA-RY-QAOA 在 2-正则图和 4-正则图上表现更优, 在随机图上部分规模节点也取得更高逼近率。研究表明, MA-RY-QAOA 能够在保持浅层电路结构的同时提升求解性能, 可为含噪中等规模量子 (NISQ) 设备上的 QAOA 优化设计提供参考。

关键词: 量子近似优化算法; 参数多角度化; RY 辅助结构; 最大割问题; 含噪中等规模量子设备

中图分类号: TP301

文献标志码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.TXXB260084

Improved QAOA based on multi-angle and RY-assisted structure

Ye Tianyu^{1,2}, Ma Penghui¹, Gan Zhigang¹

1. College of Information & Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China
2. Chifeng Industry Vocational Technology College, Chifeng 024000, China

Abstract: To address the limited expressive capability of the standard quantum approximate optimization algorithm (QAOA) in shallow circuits and the increased noise sensitivity caused by deeper quantum circuits, an improved QAOA, termed MA-RY-QAOA, was proposed by integrating parameter multi-angleization and an RY-assisted structure. In the proposed algorithm, edge-parameter multi-angleization and RY expansion were incorporated into the problem layer, while qubit-parameter multi-angleization was introduced into the mixing layer. Simulation experiments were conducted on the Max-cut problem of random graphs, complete graphs, 2-regular graphs, and 4-regular graphs with circuit depth ($p = 1$) and node sizes ranging from 4 to 12. The average approximation ratio was adopted as the evaluation metric. The results showed that the average approximation ratios achieved by MA-RY-QAOA and MA-QAOA were generally superior to those obtained by the standard QAOA, RY-QAOA, and QAOA+ algorithms. In particular, MA-RY-QAOA exhibited better performance on 2-regular and 4-regular graphs and achieved higher approximation ratios for certain scales of random graphs. These findings indicate that MA-RY-QAOA improves optimization performance while maintaining a shallow circuit structure and provides a useful reference for the design of QAOA variants on noisy intermediate-scale quantum (NISQ) devices.

Key words: quantum approximate optimization algorithm, parameter multangularization, RY-assisted structure, maximum cut problem, noisy intermediate-scale quantum device

收稿日期: 2026-02-05; 修回日期: 2026-04-09

通信作者: 叶天语, yetianyu@zjgsu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62071430); 浙江省省属高校基本科研业务费专项资金资助项目 (No.JRK21002)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.62071430), The Fundamental Research Funds for the Provincial Universities of Zhejiang (No.JRK21002)

0 引言

组合优化问题 (combinatorial optimization problem, COP) 广泛存在于图论、运筹学、通信网络、金融调度与机器学习等领域。最大割、节点覆盖、布尔可满足性 (SAT) 等核心任务在经典计算模型下多为 NP 难问题^[1], 随着规模增大, 精确算法通常难以在多项式时间内获得最优解。因此, 近似算法与启发式方法长期是研究与工程实践中的主要工具, 但在高维离散空间中, 这类方法往往存在全局最优性保证不足、可扩展性受限等问题。

在众多组合优化任务中, 最大割问题兼具理论价值与应用意义, 在电路布局、图像分割与社区检测等场景中均有直接应用, 因而常被用作评估量子优化算法等新型优化算法性能的基准。在经典近似算法方面, 戈曼斯-威廉姆森 (Goemans-Williamson, GW) 算法可达到约 0.878 的逼近比^[2], 该结果长期作为重要对照基线; 但在特定实例分布或结构化图族上, 仍存在进一步改进的研究空间。

量子计算利用叠加、纠缠等量子资源, 为部分优化任务提供了不同于经典计算的算法范式。近年来, 研究者在超导、离子阱与中性原子等量子硬件上取得工程性进展, 能够在噪声中等规模量子 (noisy intermediate-scale quantum, NISQ) 设备^[3]上探索可实现的近似量子算法。然而, 受限于相干时间和双比特门保真度, 面向 NISQ 的算法设计通常需要满足浅电路、低容错以及良好可训练性等约束。

在此背景下, 量子近似优化算法^[4] (quantum approximate optimization algorithm, QAOA) 交替施加问题哈密顿量和混合哈密顿量所生成的酉演化, 并结合经典优化器更新参数, 构成典型的量子-经典混合变分框架^[5]。尽管理论上 QAOA 随层数增加可提升逼近能力, 但在实际 NISQ 条件下, 标准 QAOA 面临两类关键挑战: 其一, 浅层电路的表达能力有限^[6-7], 往往难以达到满意的逼近率; 其二, 通过增大层数提升性能会显著加深电路并放大噪声累积效应, 导致实际增益受限甚至退化^[8-9]。因此, 如何在保持或仅微幅增加电路深度的前提下提升 QAOA 的表达能力和训练稳定性, 成为当前研究的核心问题之一。

针对 QAOA 的上述局限, 近年来出现了多条改进路线, 代表性的方向与工作如下。

(1) 基于参数细粒度化、多角度化的方法。Herrman 等^[10]提出的多角度量子近似优化算法 (multi-angle quantum approximate optimization algorithm, MA-QAOA) 通过为不同边或不同量子比特赋予独立的角度参数来扩展拟设的局部可调性和表达能力。

(2) 基于多参数问题的无关附加层、RY 辅助层的方法。Chalupnik 等^[11]提出的附加多参数问题无关层的量子近似优化算法 (augmenting QAOA ansatz with multiparameter problem-independent layer, QAOA+) 在标准 QAOA 基础上附加一层与问题哈密顿量无直接耦合的多参数问题无关层, 实现了对多种问题的泛化能力, 以扩展可优化空间并在浅层获得更优表现。王云江等^[12]提出的 RY 层辅助量子近似优化算法 (RY-layer-assisted quantum approximate optimization algorithm, RY-QAOA) 在问题哈密顿量中加入带有独立参数的单量子比特泡利 Y 旋转门, 拓展了单层对希尔伯特空间的探索能力。马鹏辉等^[13]提出的全联通 QAOA+ (fully-connected QAOA+, FC-QAOA+) 由层数为 1 的标准 QAOA、全联通多参数问题无关层和测量层构成, 其中全联通多参数问题无关层将原始 QAOA+ 问题无关层的耦合拓扑从链式拓展为全联通, 即问题无关层允许任意 2 bit 进行相互作用 (总数达到 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对, 其中 n 为输入量子比特数), 在单一增强层内显著扩大可达态空间。

(3) 基于反绝热思想嵌入的方法。Chandarana 等^[14]提出的数字化反绝热量子近似优化算法 (digitized-counterdiabatic quantum approximate optimization algorithm, DC-QAOA) 在传统 QAOA 中加入了与问题相关的反绝热驱动项, 将其数字化并融入电路, 以缓解有限深度下的非绝热激发, 从而提高收敛速度或逼近率。

(4) 基于反馈或控制的不需要大量经典优化的方法。Magann 等^[15]提出的基于反馈的量子优化 (feedback-based quantum optimization, FALQON) 通过测量-反馈或控制逐步设定电路参数, 减少甚至替代传统的大规模经典优化开销。Patel 等^[16]提出了一种基于强化学习的递归量子近似优化算法 (recursive quantum approximate optimization algo-

rithm, RQAOA), 通过递归的方式实现量子近似优化, 通过在每次迭代后固定部分的变量来逐步降低问题的规模^[17]。

(5) 基于热启动与结构化初态、定制混合器的方法。利用经典近似算法(如半正定规划投影、GW算法)得到的启发式解进行热启动^[18], 或设计与问题结构相匹配的混合器(如生成树优化量子算法^[19]、结构化混合器), 可在浅层下显著提升 QAOA 性能并降低训练难度。

(6) 基于旋转轴、混合器自由度扩展的方法。放宽混合器的旋转轴或加入额外非对角旋转(如允许在 x - y 平面^[20]变化), 从而在每层获得更多可控方向, 提高态探索的覆盖效率, 已被证明在小规模基准上能带来性能提升。

上述多条路线各有侧重, 有的着重于参数化表达能力(如 MA-QAOA、QAOA+), 有的着重于将物理演化思想(反绝热)或控制理论融入量子电路(如 DC-QAOA、FALQON+), 有的通过结合经典预处理/结构信息以弱化变分优化的难度(如热启动、生成树优化量子算法)。然而, 这些改进方法也各自面临权衡, 参数增多会带来更高的优化复杂度和可能的过拟合, 某些附加层或控制策略在实际硬件上可能付出更高的两量子比特门的代价。热启动类方法对经典近似解的质量也较为依赖。因此, 从“浅层可实现性-表达能力-训练稳定性-硬件代价”多维度出发, 构造兼顾性能与可部署性的 QAOA 结构仍具有研究价值。

基于对上述方向的分析与比较, 结合 MA-QAOA^[10]和 RY-QAOA^[12]的思路, 本文提出一种融合参数多角度化和 RY 辅助结构的改进 QAOA (MA-RY-QAOA)。该算法旨在: 通过问题层的边参数多角度化和混合层的量子比特参数多角度化协同增强局部可调性; 在问题层嵌入 RY 门(即单量子比特泡利 Y 旋转门)以丰富搜索方向, 提升单层表达能力和对复杂图结构的适应性; 在 NISQ 约束下保证浅层电路可实现性。本文在层数 $p = 1$ 、节点数 $n = 4 \sim 12$ 的情形下, 分别对边概率为 0.8 的随机图、完全图、2-正则图和 4-正则图的最大割问题以平均逼近率为评价指标, 进行了 50 次仿真实验。仿真实验结果表明: 对于上述 4 类图, MA-RY-QAOA 在绝大多数节点均显著优于标准 QAOA、RY-QAOA 和 QAOA+; MA-RY-QAOA 在

稀疏正则图(尤其是 2-正则图)上比 MA-QAOA 更有优势; MA-QAOA 在稠密完全图上比 MA-RY-QAOA 整体占优; 在随机图上, MA-RY-QAOA 和 RY-QAOA 两者优势随节点规模呈区间性交替。

1 最大割问题

最大割问题是图论与组合优化中经典的 NP 难问题^[1]之一。对于给定的无向加权图 $G = (V, E, w)$, 最大割问题的目标是在 V 上寻找一个二划分 $(R, \bar{R})$, 使得跨越两个子集的边的权重总和最大, 其中 V 为节点集合, E 为边集合, $w_{ij} \geq 0$ 表示边 $(i, j) \in E$ 的权重, $R \subseteq V$, $\bar{R}$ 为 R 在 V 中的补集。形式化地, 无向加权图 G 的最大割问题的目标可被表示为:

$$\max \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} (v_i + v_j - 2v_i v_j) \quad (1)$$

其中, $i \in V$, $v_i \in \{0, 1\}$ 表示节点 i 所属的不同集合, 即 $v_i = 0$ 表示节点 i 属于集合 R , $v_i = 1$ 表示节点 i 属于集合 $\bar{R}$ 。该目标函数体现了, 当 $v_i \neq v_j$ 时, 即边 (i, j) 被割开时, 计算权重 w_{ij} ; 当 $v_i = v_j$ 时, 即边 (i, j) 未被割开时, 不计算权重 w_{ij} 。无向无权图 $G' = (V, E)$ 的最大割问题的目标可被表示为:

$$\max \sum_{(i,j) \in E} (v_i + v_j - 2v_i v_j) \quad (2)$$

在一般图上, 最大割问题的精确求解通常具有指数级时间复杂度。经典方法(如分支定界法、整数线性规划^[21])在小规模实例上能够获得最优解, 但随着节点数和边数增长, 计算代价往往呈现快速上升, 经典方法难以满足大规模问题的求解需求。为此, 研究者们发展了多类近似与启发式算法以在可接受时间内获得高质量解。贪心与局部搜索算法通过邻域交换或节点翻转等策略迭代改进割值, 具有实现简单、速度快的特点; 模拟退火与遗传算法等随机化启发式方法借助随机扰动与进化机制增强全局探索能力, 以降低陷入局部最优的风险; GW 算法^[2]基于半正定规划松弛并结合随机超平面舍入, 在理论上达到了约为 0.878 的逼近比, 是最大割问题解决中最具代表性的经典近似算法之一。

尽管上述方法在不同场景下各具优势, 但在高维复杂网络或大规模实例中, 仍难以同时兼顾求解精度、可扩展性与计算开销。随着量子计算的发

展, 研究者们开始探索利用量子叠加、纠缠等特性求解最大割问题, 其中以面向NISQ设备的变量子优化方法, 尤其是QAOA^[4]为代表的量子-经典混合框架, 成为近年来的重要研究方向。

2 MA-RY-QAOA

2.1 MA-RY-QAOA 流程

MA-RY-QAOA 的量子线路如图1所示, 其解决最大割问题的整个流程如下。

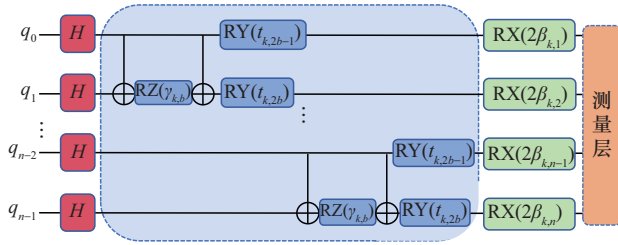


图1 MA-RY-QAOA 的量子线路

步骤1 制备初始量子态。为制备初始量子态:

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_z |z\rangle \quad (3)$$

对每个 $|0\rangle$ 施加1次 H 门, 共施加 n 次 H 门, 其中 $|z\rangle$ 遍历所有 n 比特计算基态, H 门为哈达玛门, n 为由图的节点数。

步骤2 构建问题酉算符。将 $z = \frac{I-Z}{2}$ 代入式(2)得到问题哈密顿量为:

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} (I - Z_i \otimes Z_j) \quad (4)$$

其中, Z_i 和 Z_j 分别为第 i 、 j 个量子比特上的单量子比特泡利 Z 算子, I 为单位算子, $\otimes$ 为张量积。式(4)可进一步简化为:

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} Z_i \otimes Z_j \quad (5)$$

与MA-QAOA一致, MA-RY-QAOA在问题酉算符中对第 k 层的每条边 (ij) 引入独立参数 $\gamma_{k,b_{ij}}$, 由式(5)可以得到:

$$U(\gamma_k, H_C) = \prod_{(ij) \in E} e^{\left(-i\gamma_{k,b_{ij}} \frac{Z_i \otimes Z_j}{2}\right)} \quad (6)$$

其中, $\gamma_k = \{\gamma_{k,1}, \gamma_{k,2}, \dots, \gamma_{k,m}\}$, $\gamma_{k,b_{ij}} \in [0, 2\pi)$, b_{ij} 表示边的编号, $b_{ij} \in \{1, 2, \dots, m\}$, E 为图的边集合, $m = |E|$ 是图的边数。由于:

$$\frac{Z_i \otimes Z_j}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$e^{-i\gamma_{k,b_{ij}} \frac{Z_i \otimes Z_j}{2}} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\gamma_{k,b_{ij}}}{2}} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{CONT}(ij) \text{RZ}\left(j, \gamma_{k,b_{ij}}\right) \text{CONT}(ij) \quad (8)$$

式(6)的问题酉算符可被进一步表示为:

$$U(\gamma_k, H_C) = \prod_{(ij) \in E} \text{CONT}(ij) \text{RZ}\left(j, \gamma_{k,b_{ij}}\right) \text{CONT}(ij) \quad (9)$$

其中, CONT代表受控非门, RZ代表单量子比特泡利 Z 旋转门。

在问题层后引入RY层, 根据一阶Trotter分解(即 $e^{A+B} \approx e^A e^B + O(\delta^2)$, 其中 A 和 B 是算子, δ 是一个较小的参数, $O(\delta^2)$ 为误差), 问题酉算符可被表示为:

$$\begin{aligned}
U(\gamma_k, H_C, \mathbf{t}_k) &= \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} \left(\gamma_{k,b_{ij}} Z_i \otimes Z_j + t_{k,2b_{ij}-1} Y_i \otimes I_j + t_{k,2b_{ij}} I_i \otimes Y_j \right) \right] \approx \\
&\exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} \gamma_{k,b_{ij}} Z_i \otimes Z_j \right] \times \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} \left(t_{k,2b_{ij}-1} Y_i \otimes I_j + t_{k,2b_{ij}} I_i \otimes Y_j \right) \right] = \\
&\exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} \gamma_{k,b_{ij}} Z_i \otimes Z_j \right] \times \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} t_{k,2b_{ij}-1} Y_i \otimes I_j \right] \times \exp \left[-i \frac{1}{2} \sum_{(ij) \in E} t_{k,2b_{ij}} I_i \otimes Y_j \right] = \\
&\prod_{(ij) \in E} \exp \left[-i \gamma_{k,b_{ij}} \frac{Z_i \otimes Z_j}{2} \right] \times \prod_{(ij) \in E} \exp \left[-i t_{k,2b_{ij}-1} \frac{Y_i \otimes I_j}{2} \right] \times \prod_{(ij) \in E} \exp \left[-i t_{k,2b_{ij}} \frac{I_i \otimes Y_j}{2} \right] = \\
&\prod_{(ij) \in E} \text{CONT}(ij) \text{RZ}(j, \gamma_{k,b_{ij}}) \text{CONT}(ij) \times \prod_{(ij) \in E} \text{RY}(i, t_{k,2b_{ij}-1}) \times \prod_{(ij) \in E} \text{RY}(j, t_{k,2b_{ij}})
\end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{t}_k = (t_{k,1}, t_{k,2}, \dots, t_{k,2m})$, Y_i 是作用在第 i 量子比特的单量子比特泡利 Y 算子, RY 代表单量子比特泡利 Y 旋转门。式(10)的问题酉算符的量子线路如图2所示。

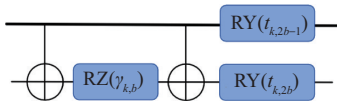


图2 式(10)的问题酉算符的量子线路

步骤3 构造混合酉算符。混合哈密顿量 H_B 为所有单量子比特泡利 X 算子的和, 即:

$$H_B = \sum_{j=1}^n X_j \quad (11)$$

为增强可调性, 与 MA-QAOA 一致, MA-RY-QAOA 同样在混合酉算符中对第 k 层的 n 个量子比特引入独立参数 $\beta_k = \{\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots, \beta_{k,n}\}$, 从而根据式(11)可得到:

$$U(\beta_k, H_B) = e^{-i \sum_{j=1}^n \beta_{k,j} X_j} = \prod_{j=1}^n e^{-i \beta_{k,j} X_j} = \prod_{j=1}^n \text{RX}(j, 2\beta_{k,j}) \quad (12)$$

其中, RX 代表单量子比特泡利 X 旋转门。式(12)的混合酉算符的量子线路如图3所示。

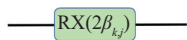


图3 式(12)的混合酉算符的量子线路

步骤4 求解问题哈密顿量的期望值。初始态 $|s\rangle$ 经层数为 p 的 MA-RY-QAOA 演化后的量子态为:

$$\begin{aligned}
|\hat{s}\rangle &= U(\beta_p, H_B) U(\gamma_p, H_C, \mathbf{t}_p) \dots \\
&U(\beta_p, H_B) U(\gamma_1, H_C, \mathbf{t}_1) |s\rangle
\end{aligned} \quad (13)$$

对 $|\hat{s}\rangle$ 进行量子测量, 然后计算出 H_C 的期望值为:

$$\text{EC} = \langle \hat{s} | H_C | \hat{s} \rangle \quad (14)$$

步骤5 参数优化。优化量子线路中的参数使得 H_C 在 $|\hat{s}\rangle$ 上的期望值尽可能大。重复上述步骤直至结果收敛, 从而得到最佳参数:

$$(\gamma^*, \beta^*, \mathbf{t}^*) = \arg \max_{\gamma, \beta, \mathbf{t}} \text{EC} \quad (15)$$

其中, $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p\}$, $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\}$, $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_p\}$ 。

步骤6 输出结果。为得到最大切割问题的近似解, 对最佳参数对应的输出量子态进行测量。

2.2 MA-RY-QAOA 特点

MA-RY-QAOA 并非 MA-QAOA 与 RY-QAOA 的简单叠加, 而是在参数结构与演化机制上进行了协同整合, 具体体现在以下3个方面。

(1) 参数耦合与功能分工

在 MA-RY-QAOA 的每一层中, 参数被分为3类: 边角度参数 $\gamma_{k,b_{ij}}$ 、RY 旋转参数 $t_{k,2b_{ij}-1}$ 和 $t_{k,2b_{ij}}$ 、量子比特角度参数 $\beta_{k,j}$ 。尽管这些参数在形式上相互独立, 但在量子态演化过程中存在隐式耦合: $\gamma_{k,b_{ij}}$ 控制 RZZ 的相位累积, 决定了问题哈密顿量对态空间的“能量导向”; $t_{k,2b_{ij}-1}$ 和 $t_{k,2b_{ij}}$ 在每个量子比特上引入绕 y 轴的旋转, 增加了布洛赫球上

的可控方向,使得态演化不再局限于RZZ确定的平面; β_{kj} 则通过RX实现全局的态混合。它们共同作用于同一层线路,使得在RZZ累积相位的同时,RY调整基矢方向,RX完成混合。这种耦合关系使得参数之间并非孤立优化,而是协同影响探索最终量子态的能力,从而在浅层电路中实现更丰富的态空间覆盖。

(2) 冗余参数的避免与结构优化

与简单叠加不同,MA-RY-QAOA在参数设置上避免了冗余: $\gamma_{k,b_{ij}}$ 沿用了MA-QAOA的细粒度设计,每条边独立,保证了对图结构的局部适配能力; $t_{k,2b_{ij}-1}$ 和 $t_{k,2b_{ij}}$ 直接继承RY-QAOA的结构,每条边对应两个RY,分别作用于两个端点,未引入额外的边间耦合参数,避免了参数规模的过度膨胀;混合层参数 β_{kj} 同样沿用了MA-QAOA的量子比特独立设计。这种参数分工使得各参数都有明确的物理意义和功能定位: $\gamma_{k,b_{ij}}$ 控制相位累积, $t_{k,2b_{ij}-1}$ 和 $t_{k,2b_{ij}}$ 提供旋转自由度, β_{kj} 实现混合。参数之间无重叠冗余,确保了优化过程中梯度信息的有效传递,避免了简单叠加可能导致的参数相关性与优化困难。

(3) 协同增益的机理

通过上述耦合与分工设计,MA-RY-QAOA在单层内同时实现了两种增益。

① MA-QAOA的优势:对问题哈密顿量的细粒度参数化,使得相位累积能够适配不同边的权重,尤其适用于稠密图或权重差异较大的图结构。

② RY-QAOA的优势:引入RY扩展了旋转方向,增强了单层对希尔伯特空间的探索能力,尤其有助于稀疏图或规则图中局部结构的有效采样。

二者结合产生了协同效应,RY提供的额外自由度使得相位累积的“能量导向”能够更灵活地调整方向,而细粒度的边参数又使得这种方向调整能够精准地作用于每条边对应的子空间。实验结果表明,这种协同设计在2-正则图、4-正则图等稀疏结构上取得了优于单一算法的性能,验证了融合设计的独特性。

3 实验结果及其分析

3.1 实验结果

为评估标准QAOA、MA-QAOA、RY-QAOA、QAOA+以及MA-RY-QAOA的性能,本文以IBM

Qiskit为工具,对标准QAOA及其4种改进算法解决概率为0.8的随机图、2-正则图、4-正则图和完全图4类加权基准图上的最大割问题分别进行了仿真实验。随机图代表难以预测的系统,正则图代表具备一致性的网络拓扑,完全图代表节点连通稠密的系统。实验假定5种算法的层数都是1,图的节点数为4~12,每种节点数均实验50次。实验的仿真环境配置与随机化依据如附录1所示。逼近率被定义为:

$$AR = \frac{EC(\gamma^*, \beta^*, t^*)}{C_{\max}} \quad (16)$$

其中, $C_{\max}$ 为最大割问题的全局最优解对应的 H_C 的期望值,全局最优解的获取过程如附录1所示。平均逼近率是实验50次产生的AR的平均值。

当层数 $p=1$ 时,5种算法在4类图上的平均逼近率与节点数的关系如图4所示。根据图4,可得到如下结论。

(1) 随机图

当节点数为4~6时,MA-RY-QAOA的平均逼近率最高,分别约为0.988、0.960、0.955,均优于其余4种算法。当节点数为6时,MA-QAOA的平均逼近率约为0.953,略低于MA-RY-QAOA的0.955。当节点数为7~11时,MA-QAOA的平均逼近率优于MA-RY-QAOA,但两者均明显高于QAOA+、RY-QAOA和标准QAOA。当节点数为12时,MA-RY-QAOA的平均逼近率反超MA-QAOA的平均逼近率(约0.872 vs 0.862),两者仍保持对其余3种算法的领先优势。

(2) 完全图

在节点数为4~12的全部节点范围内,MA-QAOA的平均逼近率始终最高,MA-RY-QAOA的平均逼近率始终稳居第二,两者均明显高于QAOA+、RY-QAOA和标准QAOA,其中,当节点数为5时,MA-RY-QAOA的平均逼近率略低于MA-QAOA的平均逼近率(约0.979 vs 0.981)。

(3) 2-正则图

当节点数为4时,QAOA+的平均逼近率略高于MA-RY-QAOA的平均逼近率(约0.929 vs 0.922),两者都显著高于MA-QAOA、RY-QAOA和标准QAOA。当节点数为5~12时,MA-RY-QAOA在所有节点上均取得最高平均逼近率,MA-QAOA的平均逼近率排第二,QAOA+的平均逼近

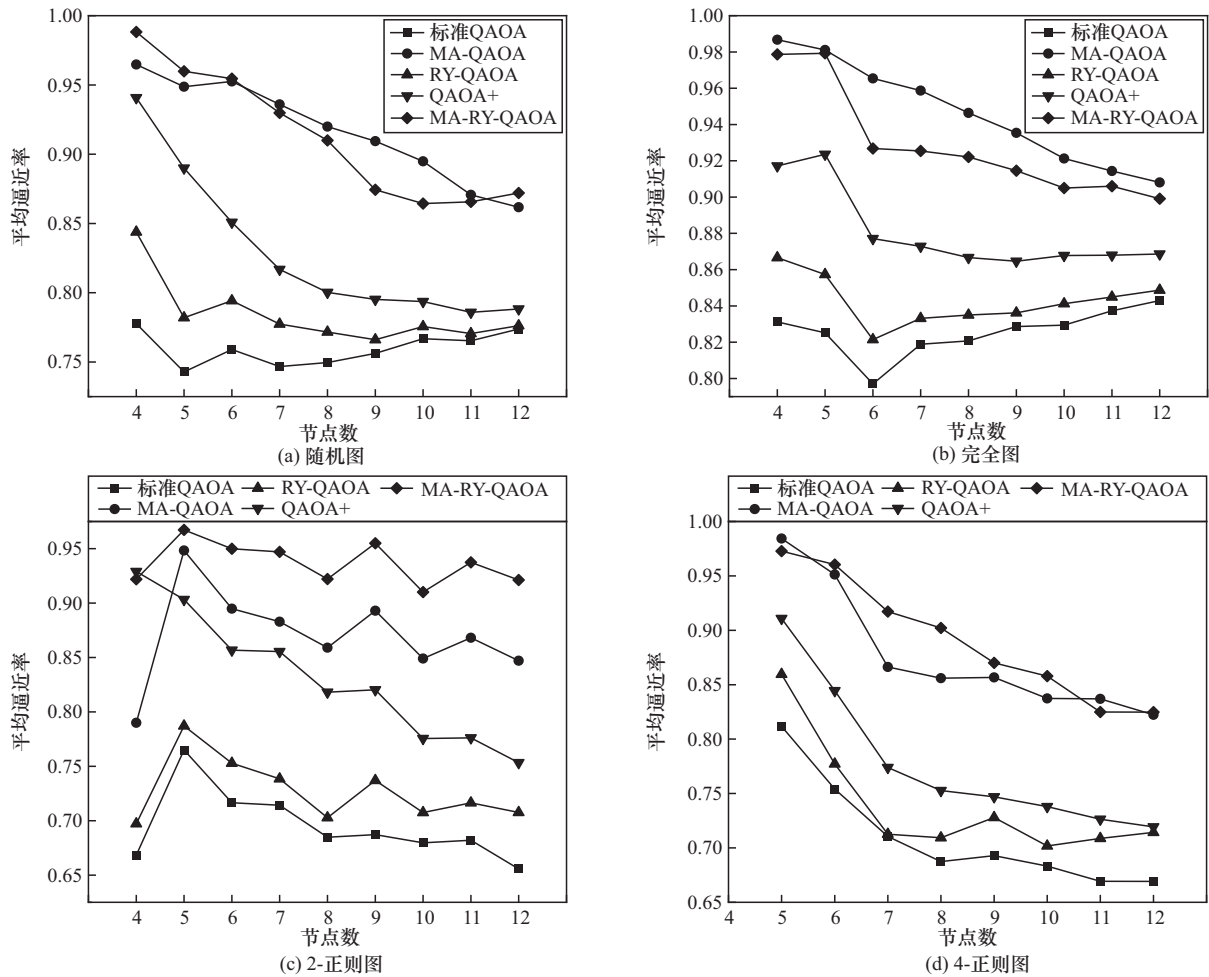


图4 5种算法在4类图上的平均逼近率与节点数的关系

率排第三, RY-QAOA 和标准 QAOA 的平均逼近率相对较低。在稀疏、规则且局部结构重复的2-正则图上, MA-RY-QAOA 的平均逼近率优势也很稳定, 呈现出“跨节点规模的一致领先”。

(4) 4-正则图

当节点数为4时, 4-正则图不存在或不满足构造约束, 因此该节点不参与对比。当节点数为5时, MA-QAOA 的平均逼近率略高于 MA-RY-QAOA 的平均逼近率 (约0.984 vs 0.973), 两者均明显高于其余3种算法的平均逼近率。当节点数为6~10时, MA-RY-QAOA 的平均逼近率在所有节点上均高于其他4种算法的平均逼近率。当节点数为11时, MA-QAOA 的平均逼近率略微反超 MA-RY-QAOA 的平均逼近率 (约0.837 vs 0.825), 两者均明显高于其余3种算法的平均逼近率。当节点数为12时, MA-RY-QAOA 的平均逼近率略高于 MA-QAOA 的平均逼近率 (约0.825 vs 0.822)。

综合以上统计结果可得到: 从总体上说, MA-RY-QAOA 和 MA-QAOA 的平均逼近率在4种类型图和绝大多数节点上都明显优于标准 QAOA、RY-QAOA 和 QAOA+ 的平均逼近率; 在完全图上, MA-QAOA 的平均逼近率在所有节点上均领先于 MA-RY-QAOA 的平均逼近率; 在2-正则图上, MA-RY-QAOA 的平均逼近率在所有节点上均领先于 MA-QAOA 的平均逼近率; 在4-正则图上, MA-RY-QAOA 的平均逼近率在绝大多数节点上领先 MA-QAOA 的平均逼近率; 在随机图上, MA-RY-QAOA 的平均逼近率在小规模节点和大规模节点上会领先 MA-QAOA 的平均逼近率, 但在中间规模节点上会被 MA-QAOA 的平均逼近率反超。

结合5种算法在节点数为4~12时的实验结果可以合理推测, 当节点数大于12且距离12不太远时, 在4类图上, MA-RY-QAOA 和 MA-QAOA 的平均逼近率仍大概率领先于标准 QAOA、RY-QAOA 和

QAOA+的平均逼近率;在2-正则图和4-正则图上,MA-RY-QAOA的平均逼近率会大概率领先于MA-QAOA的平均逼近率;在完全图上,MA-QAOA的平均逼近率会大概率领先于MA-RY-QAOA的平均逼近率;在随机图上,两者平均逼近率的关系可能与图的节点规模等有关,呈现“区间性交替领先”的格局。

3.2 实验结果分析

本节从算法机理和结构上分析上述仿真实验结果。

(1) MA-QAOA的平均逼近率在完全图上优势更稳定:完全图边数 $m = \frac{n(n-1)}{2}$ 随节点数 n 快速增长,MA-QAOA在问题层为每条边引入独立角度参数,使问题哈密顿量演化能够更细粒度地适配稠密耦合结构,因此在完全图上更容易获得持续优势。

(2) MA-RY-QAOA的平均逼近率在稀疏图上优势更突出:2-正则和4-正则图结构更规则且相互作用更局部。MA-RY-QAOA在问题层中融合边参数多角度化和RY扩展,同时在混合层进行量子比特参数多角度化,既保留了MA-QAOA的参数细粒度特性,又继承了RY-QAOA的旋转空间扩展优势,从而更容易在稀疏图上形成稳定领先。尤其值得一提的是,MA-RY-QAOA在问题层进行的RY扩展等效增加了布洛赫球上的可控演化方向,使浅层电路在“有限深度”下仍具备更强的态空间探索能力。

(3) QAOA+的平均逼近率在4类图上的几乎所有规模节点上低于MA-RY-QAOA和MA-RY-QAOA的平均逼近率,但高于标准QAOA和RY-QAOA的平均逼近率:QAOA+的问题无关层能够扩展可训练空间,因此其平均逼近率常优于标准QAOA和RY-QAOA的平均逼近率;但QAOA+并没有对问题层不同边进行参数多角度化和对混合层不同量子比特进行参数多角度化,同时也并没有在问题层引入方向扩展,因此其平均逼近率在4类图上的几乎所有规模节点上往往低于MA-QAOA和MA-RY-QAOA的平均逼近率。

标准QAOA的单层演化仅包含RZZ(生成 $Z_i Z_j$ 方向)和RX(绕 x 轴旋转),其可达量子态受限于生成元集合。MA-QAOA通过边参数多角度化增加了自由度,使RZZ的相位累积能够精细适配不同边的权重,但演化方向仍局限于 z 轴,可能导致优化景观中存在大量次优平坦区。RY-QAOA引入RY增

加了绕 y 轴的旋转,但边参数未细粒度化,无法充分利用图结构信息。MA-RY-QAOA的边参数多角度化使相位累积可局部适配,RY提供正交旋转轴将态矢量引出 z 轴方向,两者结合显著扩大了可达态空间,而且混合层采用量子比特参数多角度化的RX,与问题层RY旋转轴正交,可实现更精细的单比特调控,进一步增强了优化的灵活性与稳定性。这些互补性在稀疏图上尤为突出——RZZ提供的方向有限时,RY的引入可大幅扩充探索方向,因此2-正则图与4-正则图上MA-RY-QAOA表现优于MA-QAOA。另外,随机图上MA-RY-QAOA在小规模图(4~6节点)和大规模图(12节点)上优于MA-QAOA,而在中等规模图(7~11节点)略逊,这可能由优化景观复杂度随节点规模的非单调变化引起。

4 讨论

为评估在NISQ场景下的可实现性,本节对5种算法在解决最大割问题时所消耗的量子资源进行对比。NISQ器件通常受限于相干时间和两量子比特门保真度,量子线路逻辑规模(门数)和量子线路逻辑深度通常直接决定了可运行性和结果质量,因此采用电路门数和电路深度为指标对量子资源消耗进行量化对比具有重要意义。这里,由于RZZ门由CNOT+RZ+CNOT构成,量子线路逻辑门数包括两量子比特CNOT门数以及单量子比特 H 、RX、RY、RZ门数;量子线路逻辑深度是指在所有逻辑门尽可能并行化后,量子线路需串行执行的最小层数。当层数为1时,5种算法的量子线路逻辑门消耗情况如表1所示,其中图的边数 m 与图的节点数 n 之间的关系随图的类型而变化。

完全图满足:

$$m = \frac{n(n-1)}{2} \quad (17)$$

k -正则图满足:

$$m = \frac{kn}{2} \quad (18)$$

边存在概率为 q 的随机图的期望边数为:

$$E(m) = q \frac{n(n-1)}{2} \quad (19)$$

为在相同节点数下对5种算法所消耗的量子资源进行细致比较,以 $n=8$ 为例对比当层数为1时的量子线路逻辑门数和量子线路逻辑深度,如图5所示。选择该节点数的原因在于:其规模既能覆盖

表 1

5 种算法的量子线路逻辑门消耗情况

算法	两量子比特门数	单量子比特门数				单量子比特门总数
	CNOT 门数	H	RX	RY	RZ	
QAOA	$2m$	n	n	0	m	$m + 2n$
MA-QAOA	$2m$	n	n	0	m	$m + 2n$
RY-QAOA	$2m$	n	n	$2m$	m	$3m + 2n$
QAOA+	$2(m + n - 1)$	n	$2n$	0	$m + n - 1$	$m + 4n - 1$
MA-RY- QAOA	$2m$	n	n	$2m$	m	$3m + 2n$

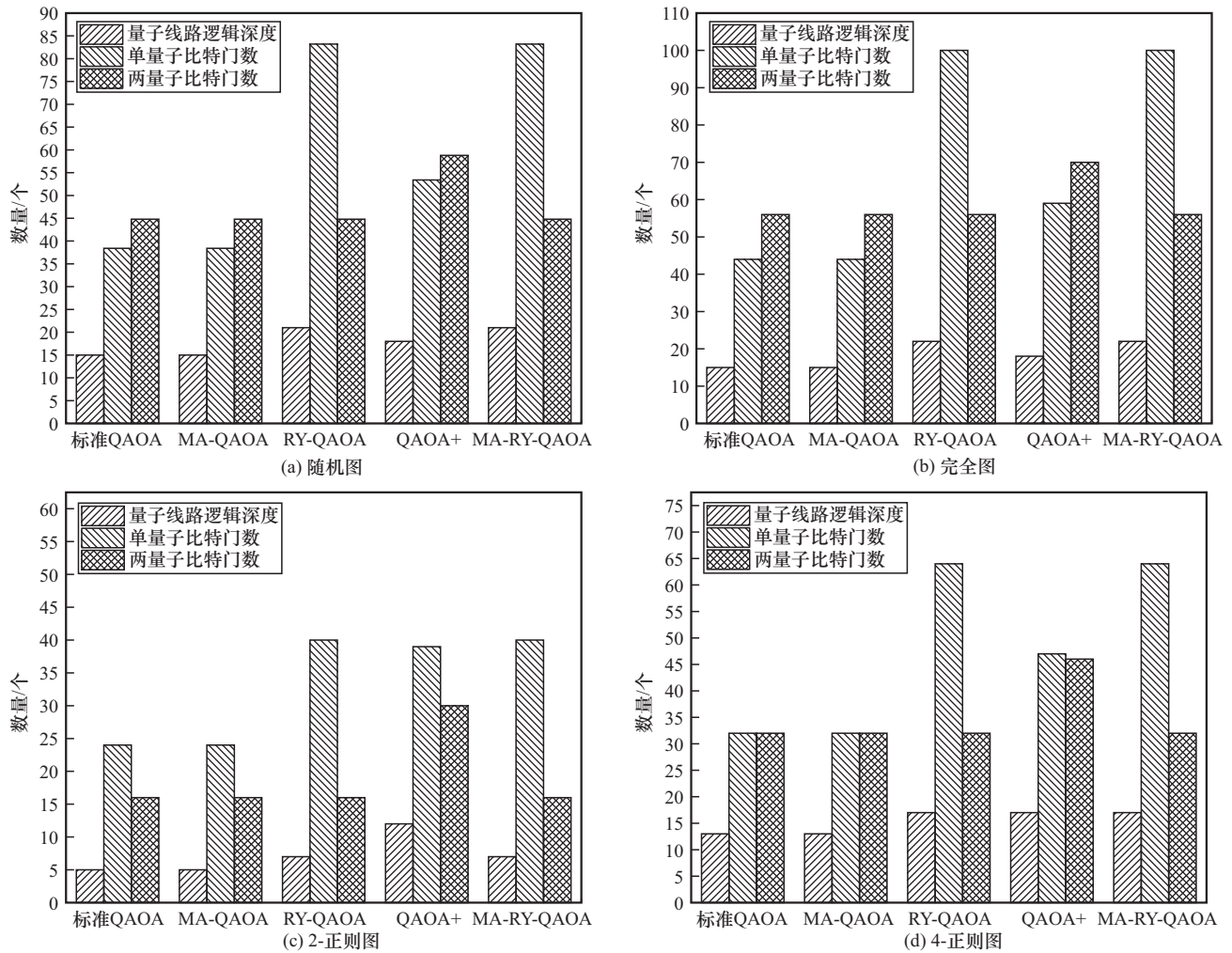


图 5 5 种算法量子资源消耗情况对比

随机图、完全图、正则图等多类结构差异，又可避免过小规模下“图结构不充分”或“正则图不可构造”等边界问题。

因为 MA-QAOA 没有添加额外的量子门，所以其量子线路逻辑深度和标准 QAOA 的量子线路逻辑深度相同；QAOA+ 引入问题无关层，其量子线路逻辑深度通常会高于标准 QAOA 的量子线路

逻辑深度；MA-RY-QAOA 和 RY-QAOA 都在问题层引入 RY 扩展，它们的量子线路逻辑深度相同，但通常会高于标准 QAOA 的量子线路逻辑深度。

若要得到与 MA-RY-QAOA 在浅层下相当的逼近率，标准 QAOA、RY-QAOA 和 QAOA+ 往往需增加层数 p ，从而导致整体量子线路深度显著上升，并伴随单量子比特门和两量子比特门数量的大

幅增长以及噪声累积效应的大幅增强。相较之下, MA-RY-QAOA 将“参数多角度化”和“RY扩展”融合在同一层内,在不增加层数的前提下提高了单层的可表达性和优化稳定性。

在NISQ噪声环境下, MA-RY-QAOA的单层电路可高质量执行。以 $n=10$ 、4-正则图为例(边数 $m=20$),单层电路包含20个两量子比特门和70个单量子比特门。按照典型门执行时间(两量子比特门300 ns, 单比特门50 ns)估算,总执行时间约为 $20 \times 300 \text{ ns} + 70 \times 50 \text{ ns} = 9.5 \mu\text{s}$,远低于当前主流超导量子处理器的相干时间(100~300 μs)。因此,现有硬件能够完整运行该电路而不会因退相干导致性能显著劣化。

从噪声容忍度看,电路深度是关键指标。在 $n=10$ 、2-正则图上, MA-RY-QAOA 单层深度为9,平均逼近率达0.96;标准QAOA单层深度仅为5,平均逼近率仅为0.85。若标准QAOA需通过增加层数达到相近性能(如 $p=3$),其深度增至15,两量子比特门数从10增至30,噪声累积效应显著增强。故在等效性能目标下, MA-RY-QAOA的单层结构相比标准QAOA的多层结构具有更优的噪声容忍度。

综上所述,在浅层可实现性与性能提升的权衡下, MA-RY-QAOA 相比标准QAOA、RY-QAOA和QAOA+更契合当前NISQ硬件条件。

5 结束语

本文在MA-QAOA和RY-QAOA的思路基础上提出MA-RY-QAOA。MA-RY-QAOA在问题层内对边进行参数多角度化并引入RY扩展,同时在混合层对量子比特进行参数多角度化,从而在NISQ约束下增强浅层电路的表达能力和优化稳定性。在层数 $p=1$ 、节点数 $n=4\sim 12$ 的设置下,以平均逼近率为评价指标,本文针对标准QAOA、RY-QAOA、QAOA+、MA-QAOA和MA-RY-QAOA 5种算法在解决边概率为0.8的随机图、完全图、2-正则图和4-正则图上的最大割问题分别开展50次仿真实验。仿真实验结果可以得出以下结论。

(1)从总体上说,在4类图和绝大多数节点上, MA-RY-QAOA和MA-QAOA的平均逼近率均明显优于标准QAOA、RY-QAOA和QAOA+,验证了参数多角度化与RY扩展对浅层性能的有效提升。

(2)在完全图上, MA-QAOA在全部节点保持最优, MA-RY-QAOA稳居第二。

(3)在2-正则图上, MA-RY-QAOA的平均逼近率在所有节点上均领先MA-QAOA的平均逼近率;在4-正则图上, MA-RY-QAOA的平均逼近率在绝大多数节点上领先MA-QAOA的平均逼近率。

(4)在随机图上, MA-RY-QAOA和原始MA-QAOA两者的优势随节点规模呈区间性交替: MA-RY-QAOA在小规模与大规模节点上更占优,而MA-QAOA在中等规模节点上略优。

未来,笔者将考察MA-RY-QAOA在层数更多和图节点规模更大时的性能,将其应用于最大割以外的NP难问题以验证其结构改进的普适性,并探索其与热启动策略等相结合的可能性。

附录1 实验设置

(1) 仿真环境的具体配置

本文所有仿真实验均基于IBM Qiskit Aer的态矢量模拟器(statevector方法)进行。该模拟器在理想无噪声条件下精确计算量子态的演化与期望值,不引入任何退相干、门保真度损失或测量误差等NISQ硬件噪声。采用理想模拟的目的是评估算法本身在表达能力与优化性能上的本质差异,排除硬件噪声对结果的影响,从而更清晰地揭示不同算法结构对平均逼近率的贡献。

实验未考虑噪声模型的原因在于:本文聚焦于浅层电路下算法拟设的结构改进,首先需验证其在理想条件下的性能上限;若在理想条件下性能提升有限,则噪声环境下更难有实用价值。此外,已有研究表明,在NISQ设备上,电路深度是影响噪声累积的关键因素。因此,本文通过对比各算法的量子线路逻辑深度与逻辑门数,间接评估了它们在NISQ设备上的可实现性——深度越浅的算法对噪声的容忍度通常越高。未来工作可进一步结合真实噪声模型(如热退相干、退极化噪声等)对MA-RY-QAOA进行噪声鲁棒性验证,以更全面地评估其在NISQ硬件上的适用性。

(2) 全局最优解的获取过程

在每次实验中,对于给定的图实例,其最大割问题的全局最优解 $C_{\max}$ 均通过暴力穷举法精确计算得到。具体而言,对于包含 n 个节点的图,遍历所有 2^n 种可能的比特串分配(每个比特串对应一种节点二划分),计算每种划分对应的割值,并记录其中的最大值及其对应的比特串。由于本文考虑的节点规模为 $n=4\sim 12$,穷举搜索的计算量在 $2^{12}=4096$ 种以内,可在毫秒级时间内完成,且能保证最优解的精确性。这一过程确保了逼近率(AR)的计算基准是绝对最优的,从而公平地评估各算法的相对性能。对于更大规模的图,精确求解 $C_{\max}$ 将变得不可行,但本文仅聚焦于浅层算法在小规模图上的性能验证,因此采用穷举法是最为可靠且无偏的选择。

(3) 实验的随机化依据

本文每次实验的随机化主要来源于图实例的随机生成,而算法参数初始化与优化过程均采用确定性设置,以排除额外随机因素的干扰。

图实例生成:对于每种图类型(随机图、完全图、2-正则图、4-正则图)和每个节点数 n ,本文预先使用固定基

种子 ($\text{base_seed} = 123$) 结合图类型标识、节点数和试验索引 $t(t = 0, 1, \dots, 49)$ 生成 50 个不同的图实例。生成方式为:

$$\text{graph_seed} = \text{base_seed} + 100\,000 \times (\text{hash}(\text{gname}) \% 1\,000) + 1\,000 \times n + t$$

其中, gname 为图类型字符串。该复合种子确保了每个试验的图实例唯一且可重复, 同时保证了同一图类型和节点数下所有模式 (算法) 运行在完全相同的 50 个图实例上, 从而实现公平比较。

参数初始化: 所有算法的初始参数统一取为常数 0.1, 不引入随机扰动。这一设计旨在避免初始值差异对优化结果的干扰, 使性能差异仅由算法结构本身和图实例决定。

优化器: 采用 COBYLA 优化器, 其内部实现为确定性算法 (无随机重启), 因此每次优化路径完全由目标函数和初始点决定。

50 次实验的随机性仅来源于图实例的不同, 参数初始化与优化过程均为确定性。因此, 平均逼近率反映了各算法在相同图分布上的平均性能, 且比较结果具有公平性和可重复性。

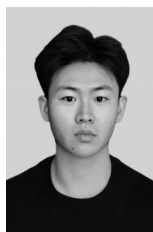
参考文献:

- [1] Håstad J. Some optimal inapproximability results[J]. Journal of the ACM, 2001, 48(4): 798-859.
- [2] Goemans M X, Williamson D P. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming[J]. Journal of the ACM, 1995, 42(6): 1115-1145.
- [3] Preskill J. Quantum computing in the NISQ era and beyond[J]. Quantum, 2018, 2: 79.
- [4] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S. A quantum approximate optimization algorithm[PP]. V1. (2014-11-14)[2026-02-05]. arXiv: arXiv.1411.4028.
- [5] Mcclean J R, Romero J, Babbush R, et al. The theory of variational hybrid quantum-classical algorithms[J]. New Journal of Physics, 2016, 18(2): 023023.
- [6] Vijendran V, Das A, Koh D E, et al. An expressive ansatz for low-depth quantum approximate optimisation[J]. Quantum Science and Technology, 2024, 9(2): 025010.
- [7] Wurtz J, Love P. MaxCut quantum approximate optimization algorithm performance guarantees for $p > 1$ [J]. Physical Review A, 2021, 103(4): 042612.
- [8] Pan Y, Tong Y F, Xue S B, et al. Efficient depth selection for the implementation of noisy quantum approximate optimization algorithm[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(18): 11273-11287.
- [9] Pellow-Jarman A, Mcfarthing S, Sinayskiy I, et al. The effect of classical optimizers and Ansatz depth on QAOA performance in noisy devices[J]. Scientific Reports, 2024, 14: 16011.
- [10] Herrman R, Lotshaw P C, Ostrowski J, et al. Multi-angle quantum approximate optimization algorithm[J]. Scientific Reports, 2022, 12: 6781.
- [11] Chalupnik M, Melo H, Alexeev Y, et al. Augmenting QAOA ansatz with multiparameter problem-independent layer[C]//Proceedings of the 2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE). Piscataway: IEEE Press, 2022: 97-103.
- [12] 王云江, 习汇明, 肖卓彦, 等. 面向最大割问题的量子近似优化算法设计[J]. 物理学报, 2025, 74(8): 1-9.
- Wang Y J, Xi H M, Xiao Z Y, et al. Design of quantum approximation optimization algorithm for the maximum cut problem[J]. Acta Physica Sinica, 2025, 74(8): 1-9.
- [13] 马鹏辉, 甘志刚, 叶天语. 基于全联通多参数问题无关层的 QAOA+ 算法设计[J]. 中国科学: 物理学、力学 & 天文学, 2026, 56(7): 270-311.
- Ma P H, Gan Z G, Ye T Y. Design of the QAOA+ algorithm based on a fully-connected multiparameter problem-independent layer[J]. SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica, 2026, 56(7): 270-311.
- [14] Chandarana P, Hegade N N, Paul K, et al. Digitized-counterdiabatic quantum approximate optimization algorithm[J]. Physical Review Research, 2022, 4: 013141.
- [15] Magann A B, Rudinger K M, Grace M D, et al. Feedback-based quantum optimization[J]. Physical Review Letters, 2022, 129(25): 250502.
- [16] Patel Y J, Jerbi S, Bäck T, et al. Reinforcement learning assisted recursive QAOA[J]. EPJ Quantum Technology, 2024, 11: 6.
- [17] Bae E, Lee S. Recursive QAOA outperforms the original QAOA for the MAX-CUT problem on complete graphs[J]. Quantum Information Processing, 2024, 23(3): 78.
- [18] Egger D J, Mareček J, Woerner S. Warm-starting quantum optimization[J]. Quantum, 2021, 5: 479.
- [19] Hartmann C, Rodellas-Gràcia N, Wallisch C, et al. Towards quantum algorithms for the optimization of spanning trees: the power distribution grids use case[PP]. V1. (2025-11-01) [2026-02-05]. arXiv: arXiv.2511.00582.
- [20] Wang Z H, Rubin N C, Dominy J M, et al. XY mixers: Analytical and numerical results for the quantum alternating operator ansatz[J]. Physical Review A, 2020, 101: 012320.
- [21] Gomory R E. Solving linear programming problems in integers[J]. Combinatorial Analysis, 1960, 10(211-215): 25.

作者简介



叶天语 (1982—), 男, 博士, 浙江工商大学教授、硕士生导师, 主要研究方向为量子信息、量子计算、量子与半量子密码等。



马鹏辉 (2001—), 男, 浙江工商大学硕士生, 主要研究方向为量子计算、量子密码学。



甘志刚 (1979—), 男, 博士, 浙江工商大学讲师, 主要研究方向为量子信息、量子计算、量子人工智能。