

基于互相关熵诱导度量的变步长 LMP 算法

汤琦, 杨欣柳

(西安邮电大学电子工程学院, 陕西 西安 710121)

摘要: 针对 α 稳定分布脉冲噪声下的水声稀疏信道估计问题, 提出了一种基于互相关熵诱导度量的变步长最小平均 p 范数滤波 (CVSS-LMP) 算法。该算法用互相关熵诱导度量来表示误差向量与零向量之间的相似性, 从而抑制脉冲噪声对 CVSS-LMP 稳态精度的影响; 给出了基于高斯核函数的互相关熵的度量方法, 并采用移动平均法构造变步长控制因子, 提高了 CVSS-LMP 算法的收敛速度和稳态精度。仿真结果表明, 和典型 LMP 类滤波算法相比, CVSS-LMP 算法的收敛速度快 17% 以上、稳态精度提高 2 dB 以上, 对 α 稳定分布脉冲噪声具有更快的收敛速度和更优的稳态误差。

关键词: 互相关熵诱导度量; 信道估计; α 稳定分布; 脉冲噪声; LMP

中图分类号: TN92

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2025087

Variable step-size LMP algorithm based on correntropy induced metric

TANG Qi, YANG Xinliu

School of Electronic Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an 710121, China

Abstract: For the problem of underwater sparse channel estimation under α -stable distributed impulsive noise, correntropy induced metric variable step-size least mean p -power (CVSS-LMP) algorithm was proposed. The correntropy induced metric was used to represent the similarity between the error vector and the zero vector, thereby suppressing the influence of impulsive noise on the steady-state accuracy of the CVSS-LMP algorithm. A Gaussian kernel-based correntropy metric was presented, and a moving average method was used to construct the variable step-size control factor, which improved the convergence speed and steady-state accuracy of the CVSS-LMP algorithm. The simulation results demonstrate that, in comparison to conventional LMP-based filtering algorithms, a 17% faster convergence rate and over 2 dB improvement in steady-state accuracy were achieved by the proposed CVSS-LMP algorithm. Furthermore, It exhibits faster convergence and superior steady-state error performance when handling α -stable distributed impulsive noise.

Keywords: correntropy induced metric, channel estimation, α -stable distribution, impulsive noise, LMP

0 引言

高斯分布是常用的背景噪声模型, 因为人们可以利用高斯分布的中心极限定理来简化信号处理算法^[1]。近年来研究发现现实中的许多噪声 (如水声

信道等) 具有显著的尖峰脉冲特性^[2-4]。这类信号显然不符合高斯分布的规律, 它的尖峰脉冲特征导致其概率密度函数呈现出显著的长尾效应, 在此情况下, 以高斯白噪声为模型的信号处理算法不再适用。研究表明, α 稳定分布是一类满足广义中心极

收稿日期: 2024-12-31; 修回日期: 2025-04-28

通信作者: 杨欣柳, yantng2024@163.com

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目 (No.2019JM-305)

Foundation Item: The Natural Science Basic Research Program of Shaanxi Province (No.2019JM-305)

限定定理的分布，可以很好地表示具有尖峰脉冲特性、非高斯的噪声分布^[5]。

最小均方误差（LMS, least mean square）算法^[6]以最小均方误差（MMSE, minimum mean squared error）准则构造代价函数，利用梯度下降原理构造权值向量的递推关系式^[7-8]，LMS算法具有原理简单，运算量小、性能稳定、易于实现等优点。但LMS算法只考虑了数据的二阶统计量，对异常值或脉冲噪声的敏感性较差^[9]。Shao等^[10]基于均值百分比误差（MPE, mean percentage error）准则提出了最小平均 p 范数（LMP, least mean p -power）算法，LMP算法利用误差信号的 p 次方作为代价函数，利用梯度下降法获得滤波器权向量更新公式。与LMS算法相比，LMP算法在处理脉冲干扰、稀疏信道或信道突然变化等场景时具有更好的鲁棒性^[10]。

传统LMP算法的步长为固定值，不能同时兼顾收敛速度和稳态误差。变步长是一种兼顾算法收敛速度和稳态误差的有效方法^[11]。Arikan等^[12]提出了归一化最小平均 p 范数（NLMP, normalized least mean p -norm）算法。郝燕玲等^[13]提出一种基于梯度加权平均的变步长归一化最小平均 p 范数（VSS-NLMP, variable step-size-normalized LMP）算法，VSS-NLMP算法利用平滑梯度矢量控制步长的变化，提高了算法收敛速度和稳态精度。针对稀疏信道，李涵琼等^[14]引入相关熵诱导度量范数约束，并提出了基于改进高斯函数一种变步长相关熵诱导LMP（VSS-CIM-LMP, variable step-size correntropy induced metric constraint LMP）算法。晁鹏等^[15]提出了一种基于改进双曲正切函数的变步长最小平均 p 范数（IVS-LMP, improved variable step-size lmp algorithm of tanh function）算法，IVS-LMP算法利用改进的双曲正切函数来调节步长，采用移动加权平均法构造变步长函数，同时引入了一个调节函数以进一步提升算法的性能。上述变步长LMP算法能够同时获得较快的收敛速度和较低的稳态误差，但这些算法构造的变步长函数在面对脉冲噪声时存在一定局限性。主要源于其未能充分考虑脉冲噪声的突发性和强烈干扰特性，从而导致算法在脉冲噪声环境下的鲁棒性受到显著影响。

针对 α 稳定分布脉冲噪声下的水声稀疏信道估计问题，本文提出一种对脉冲噪声具有鲁棒性的基于互相关熵诱导度量的变步长LMP（CVSS-LMP,

correntropy induced metric variable step-size least mean p -power）算法。CVSS-LMP算法利用误差向量与零向量间的互相关熵诱导度量作为步长变化的调节函数，选择改进高斯核函数^[16]作为互相关熵诱导度量核函数，同时考虑步长间的相关性，使用移动平均法来构建变步长迭代公式。互相关熵诱导度量在处理2个信号之间的误差时，对小误差更敏感，而对大误差不敏感。移动平均法用于平滑误差信号，在误差较大时增大步长，从而加快收敛速度，在误差较小时减小步长，从而提高稳态精度。实验表明，CVSS-LMP算法具有更快的收敛速度和鲁棒性。

1 LMP算法

用于实现信道估计的通用自适应滤波算法的系统框架如图1所示。输入信号 $x(n)$ 经过未知信道 w_0 与噪声信号 $v(n)$ 叠加得到期望信号 $d(n)$ ， $x(n)$ 经过自适应滤波器得到输出信号 $y(n)$ 。自适应滤波器通过期望信号 $d(n)$ 与输出信号 $y(n)$ 相减得到误差信号 $e(n)$ ，利用误差信号 $e(n)$ 来进行自适应算法中代价函数的构造，进而实现权值系数 $w(n)$ 自适应迭代更新，使自适应算法中的权值系数 $w(n)$ 逼近未知信道 w_0 ，进而实现信道估计。

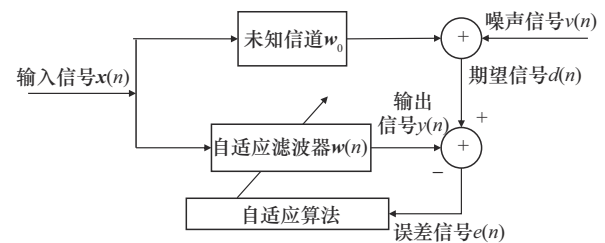


图1 用于实现信道估计的通用自适应滤波算法的系统框架

令 $\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-M+1)]^T$ 为输入信号， $\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \dots, w_{M-1}(n)]^T$ 为滤波器权值系数， $\mathbf{w}_0 = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ 为未知信道，可得到图1中自适应滤波器的期望信号 $d(n)$ ，表示为

$$d(n) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}(n) + v(n) \quad (1)$$

其中， T 表示转置， M 表示滤波器长度。输出信号 $y(n)$ 可表示为

$$y(n) = \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (2)$$

误差信号 $e(n)$ 可由实际与期望输出的差值表示，即

$$e(n) = d(n) - y(n) = \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}(n) + v(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n) \quad (3)$$

在 α 稳定分布脉冲噪声下, 最小平均 p 范数算法以误差的 p 次方来代替误差的平方, 能有效地对抗脉冲噪声干扰。因此, 本文选择最小平均 p 范数作为滤波器的自适应算法, 即以最小平均 p 范数准则来构造代价函数, 则其代价函数可表示为

$$J_{\text{LMP}}(n) = |e(n)|^p \quad (4)$$

其中, p 表示范数。对MPE准则构造的代价函数求导, 即可得到LMP算法的梯度向量为

$$\nabla J_{\text{LMP}}(n) = \frac{\partial |e(n)|^p}{\partial \mathbf{w}(n)} = -p|e(n)|^{p-1} \text{sgn}(e(n)) \mathbf{x}(n) \quad (5)$$

其中, $\text{sgn}(e(n)) = \frac{e(n)}{|e(n)|}$, $\nabla J_{\text{LMP}}(n)$ 表示LMP算法对误差向量的灵敏度。将梯度向量代入, 则得到LMP自适应算法的滤波器权值更新式为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu p |e(n)|^{p-1} \text{sgn}(e(n)) \mathbf{x}(n) \quad (6)$$

由于步长因子 μ 为常数, 因此令 $\mu = \mu' p$ 整体作为步长因子, 可将式(6)改写为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu |e(n)|^{p-2} e(n) \mathbf{x}(n) \quad (7)$$

其中, $0 < \mu < 1$ 为步长因子。

2 CVSS-LMP算法

在高斯噪声下, 利用瞬时误差直接调节步长更新是一种简单有效的方法。然而在脉冲噪声下, 由于瞬时误差对脉冲噪声具有较强的敏感性, 无法直接使用误差调节步长, 需要进一步构建估计误差与步长两者间的非线性关系。文献[16]提出基于改进高斯函数的抗脉冲噪声干扰变步长方法, 采用变形高斯函数来控制算法步长的改变, 与其他变步长方法相比计算复杂度更低、算法收敛性更好和稳态性能更优。文献[17]基于改进高斯函数提出了一种噪声鲁棒的变步长方法, 引入变步长参数 a 、 b , 对此变形高斯函数进一步改进, 提出了用于控制步长因子的改进高斯函数, 其表达式为

$$f(e(n)) = a |e(n)|^2 \exp(-b |e(n)|^2) \quad (8)$$

$f(e(n))$ 反映了误差的动态变化, 对脉冲噪声具有鲁棒性, 且实现简单, 可使用该函数来更新步长。利用步长因子的相关性, 文献[17]将前一时刻

步长和上述改进的变形高斯函数共同调节步长更新, 采用移动平均法^[18]来构建变步长函数, 进一步提高算法的鲁棒性。此变步长迭代方法可表示为

$$\mu(e(n)) = \theta \mu[e(n-1)] + (1-\theta) a |e(n)|^2 \exp(-b |e(n)|^2) \quad (9)$$

变步长函数 $\mu(e(n))$ 当系统受到脉冲噪声干扰时, 能维持步长稳定; 当误差较小时, 能产生小步长, 以降低稳态误差。然而, 研究发现在较大脉冲噪声的情况下其效果不理想。为了进一步改进效率, 文献[19]对其进行了改进, 提出了一种改进的变步长最小平均 p 范数 (IVSS-LMP, improved variable step-size LMP) 算法, 通过引入

$$f_e(n) = k_{ap} \sqrt{\sum_{i=n-k+1}^n |e(i)|^2} \quad (10)$$

其中, $k_{ap} > 0$, 根据当前时刻和前 k 个时刻的误差调整步长, 克服了变步长算法的稳态波动大问题。考虑到步长间的相关性, 使用移动平均方法进一步提高其鲁棒性, 变步长迭代式为

$$\mu(f_e(n)) = \theta \mu[f_e(n-1)] + (1-\theta) a f_e(n) \exp(-b f_e(n)) \quad (11)$$

针对较大 α 稳定分布脉冲噪声下的水声稀疏信道估计问题, 实验结果分析得知IVSS-LMP算法的鲁棒性并不理想。尽管文献[19]中的改进在一定程度上缓解了稳态波动问题, 但在脉冲噪声环境下, IVSS-LMP算法的鲁棒性仍未得到充分提升。因此, 本文提出了一种新的改进思路, 旨在更有效地应对脉冲噪声的强烈干扰, 并提高算法在此类环境下的稳定性和鲁棒性。互相关熵诱导度量 (CIM, correntropy induced metric) 在误差相对较小的情况下近似于绝对误差; 对于大误差, CIM的值接近于1, 这说明CIM对大误差的敏感性较低, 对于 α 稳定分布脉冲噪声具有更好的鲁棒性。

$$\text{CIM} = \sqrt{1 - V(X,Y)} \quad (12)$$

相关熵 $V(X,Y)$ 是一种度量2个随机变量相似度的方法。在处理非高斯噪声、脉冲噪声和异常值时展现出更高的鲁棒性。给定2个随机变量 X 和 Y , 其相关熵 $V(X,Y)$ 定义为

$$V(X,Y) = E(k_o(X,Y)) \quad (13)$$

其中, $E(\cdot)$ 表示数学期望, $k_o(X,Y)$ 表示一个核

函数，选择高斯核函数作为其核函数。

$$k_\sigma = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\|X-Y\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14)$$

其中， $\sigma^2 > 0$ 表示核的宽度，控制着核函数的形状。由式(13)和式(14)可得误差向量与零向量的互相关熵诱导度量可表示为

$$\text{CIM}^2(x,0) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp\left(-\frac{e(i)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \quad (15)$$

由式(15)可知，不同的核宽 σ 下 CIM 随误差 e 的变化曲线如图 2 所示。从图 2 可知，其 CIM 幅值变化范围为 [0,1]，且当 σ 取值越小，CIM 函数逼近 l_0 范数的性能越好。当系统存在脉冲噪声，即误差 e 偏离 0 时，CIM 能快速反映偏离状态。因此，利用 CIM 来构造步长控制函数，实现对脉冲噪声信道的快速自适应匹配；同时，对 CIM 进行滑动平均，消除突发大脉冲噪声带来的冲击响应影响，进一步提高系统的鲁棒性。

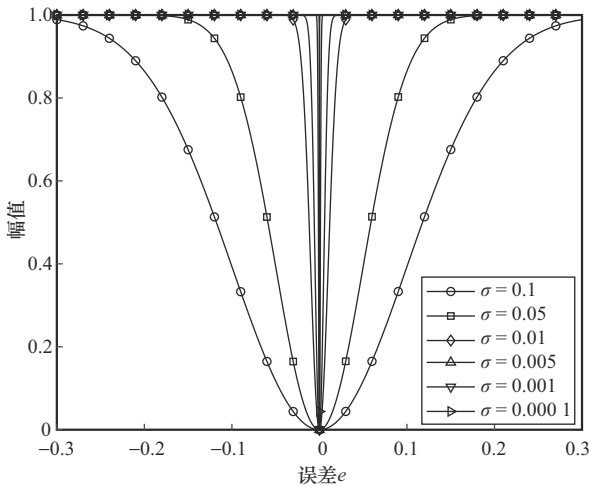


图 2 不同的核宽 σ 下 CIM 随误差 e 的变化曲线

因此，本文利用互相关熵诱导度量来表示误差向量与零向量之间的相似性。

$$f_e(n) = \eta \text{CIM}^2(x,0) = k \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp\left(-\frac{e(i)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \quad (16)$$

其中， $k = \eta \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \frac{1}{n} > 0$ ，利用式(16)来修正步长，

从而给出了更好的收敛效果和鲁棒性。考虑到步长之间的相关性，使用移动平均法进一步提高其稳定性。综上，本文提出的基于 CVSS 的步长控制函

数为

$$\begin{aligned} \mu(f_e(n)) &= \theta[f_e(n-1)] + \\ &(1-\theta)af_e(n)\exp(-bf_e(n)) \end{aligned} \quad (17)$$

其中， θ 为平滑因子，其值为小于 1 且接近于 1 的常数， θ 控制了步长的稳定性， θ 值越大步长变化越稳定，受误差影响越小。通过控制变量法进行的多次实验^[18]， θ 取值 0.98，算法性能更佳。 a 、 b 、 θ 为常值参数，共同调节步长的取值范围，控制算法的收敛速度和稳态误差。CVSS-LMP 算法如算法 1 所示。

算法 1 CVSS-LMP 算法

步骤 1 初始化 $f_e(0) = 0$ ， $\mu(0) = 0$ ，初始化参数 w_0 、 a 、 b 、 θ 、 σ_2 、 k

步骤 2 迭代更新：对于 $n=1$ 到 N ，进行以下操作

1) 计算误差

$$e(n) = d(n) - w^T(n)x(n)$$

2) 更新步长

$$f_e(n) = k \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp\left(-\frac{e(i)^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \mu(f_e(n)) &= \theta\mu[f_e(n-1)] + (1-\theta)af_e(n) \cdot \\ &\exp(-bf_e(n)) \end{aligned}$$

3) 更新权值

$$w(n+1) = w(n) + \mu[f_e(n)]|e(n)|^{p-2}e(n)x(n)$$

步骤 3 结束

本文构造的变步长函数当系统受到脉冲噪声干扰时，能维持步长稳定；当误差较大时，也能产生小步长，以降低稳态误差。

3 CVSS-LMP 算法分析

3.1 收敛性分析

假设初始条件为 $f_e(0) = 0$ 和 $\mu(0) = 0$ ，则式(17)

可改写为

$$\begin{aligned} \mu(f_e(n)) &= \theta\mu[f_e(n-1)] + \\ &(1-\theta)af_e(n)\exp(-bf_e(n)) = \\ &\sum_i^n \theta^{n-i}(1-\theta)af_e(i)\exp(-bf_e(i)) + \\ &\theta^n\mu(f_e(0)) = (1-\theta)a \sum_i^n \theta^{n-i}f_e(i)\exp(-bf_e(i)) \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$f_e(i)\exp(-bf_e(i)) \leq \frac{1}{b}\exp(-1) \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)中, 可得

$$\begin{aligned} \mu(f_e(n)) &\leq (1-\theta)a \sum_i^n \theta^{n-i} \frac{1}{b}\exp(-1) = \\ &= \frac{(1-\theta)a \exp(-1)}{b} \frac{1-\theta^n}{1-\theta} = \\ &= (1-\theta^n) \frac{a \exp(-1)}{b} \end{aligned} \quad (20)$$

当 $0 < \theta < 1$ 时, 可得 $\mu(f_e(n)) \leq \frac{\alpha \exp(-1)}{\beta}$,

上述已分析 CVSS-LMP 算法的权值向量更新公式可表示为

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu[f_e(n)]|e(n)|^{p-2}e(n)\mathbf{x}(n) \quad (21)$$

在 CVSS-LMP 算法中, 将 $\mu[f_e(n)]|e(n)|^{p-1}$ 整体视为类似于 LMS 算法中的步长因子。由于 LMS 算法收敛时应该满足步长 $0 < \mu < \frac{2}{3\text{tr}(R)}$, 故 CVSS-LMP 算法收敛时步长也应该满足式(22)。

$$0 < \mu[f_e(n)]|e(n)|^{p-1} < \frac{2}{3\text{tr}(R)} \quad (22)$$

其中, tr 表示矩阵的迹, $R = E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$ 表示输入信号的相关矩阵。本文噪声信号服从 α 稳定分布, 参数 p 应该满足 $0 < p < \alpha_v$ ($\alpha_v \leq 2$), 故 $|e(n)|^{p-2} \leq 1$, 将式(20)代入式(22)中可得

$$\frac{a}{b} \leq \frac{2\exp(1)}{3\text{tr}(R)} \quad (23)$$

因此, CVSS-LMP 算法中所引入的变步长参数满足式(23)时, 所提算法能够实现收敛。

3.2 复杂度分析

表 1 给出了 LMP、高斯分布 LMP (G-LMP, Gaussian-LMP) 算法、变步长 LMP (VSS-LMP, variable step-size LMP) 算法、IVSS-LMP 和 CVSS-LMP 算法在第 n 次迭代时, 算法所需要的加法、乘法和指数运算。其中, 信号长度 L 为常数, N 为迭代次数。

LMP 由式(2)和式(3)计算 $e(n)$ 需要 L 次加法运算和 L 次乘法运算, 由式(7)更新 $\mathbf{w}(n)$ 需要 L 次加法运算、 $L+2$ 次乘法运算和 1 次指数运算, 共需要 $2L$ 次加法运算、 $2L+2$ 次乘法运算和 1 次指数运算。CVSS-LMP 由式(2)和式(3)计算 $e(n)$ 需要 L 次加法运算和 L 次乘法运算, 由式(10)和式(11)更新步长需

要 4 次加法运算、8 次乘法运算和 2 次指数运算, 由式(7)更新 $\mathbf{w}(n)$ 需要 L 次加法运算、 $L+2$ 次乘法运算和 1 次指数运算, 共需要 $2L+4$ 次加法运算、 $2L+10$ 次乘法运算和 3 次指数运算。同理分析可得, 本文讨论的 5 种算法所需的加法、乘法和指数运算次数如表 1 所示, 从表 1 可以看出, CVSS-LMP 比 IVSS-LMP 多了 1 次指数运算, 少了 1 次加法运算; 与 G-LMP 相比, 增加了 8 次乘法运算和 3 次加法运算, 计算复杂度基本在同一个数量级上。

表 1 算法复杂度分析

算法	加法/次	乘法/次	指数/次
LMP	$2L$	$2L+2$	1
G-LMP	$2L+1$	$2L+2$	3
VSS-LMP	$2L+2$	$2L+9$	2
IVSS-LMP	$2L+4$	$2L+11$	2
CVSS-LMP	$2L+4$	$2L+10$	3

4 仿真分析

4.1 α 稳定分布噪声模型及算法性能评价方法

α 稳定分布的特征函数^[20]可表示为

$$f(t) = \exp\left\{j\delta_v t - \gamma_v |t|^{\alpha_v} \left[1 + j\beta_v \text{sgn}(t) S(t, \alpha_v)\right]\right\} \quad (24)$$

其中, $\text{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数, $S(t, \alpha_v)$ 函数表示为

$$S(t, \alpha_v) = \begin{cases} \tan \frac{\alpha_v \pi}{2}, \alpha_v \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \ln |t|, \alpha_v = 1 \end{cases} \quad (25)$$

其中, $\alpha_v \in (0, 2)$ 表示特征指数, 主要控制脉冲噪声的脉冲程度, α_v 参数值越小, 脉冲特性越强; 当 $\alpha_v = 2$ 时, 分布呈现高斯特性, 此噪声服从高斯分布。 $\beta_v \in [-1, 1]$ 表示对称参数, 当 $\beta_v = 0$ 时, 脉冲噪声呈现 α_v 对称分布。 $\gamma_v > 0$ 表示分散系数, 与高斯分布中的方差类似。 $-\infty < \delta_v < \infty$ 表示位置参数。参数 α_v 、 β_v 、 γ_v 和 δ_v 直接决定特征函数分布, 因此本文用 $V = [\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \delta_v]$ 来表征水声环境的噪声模型。

α 脉冲噪声信号没有方差和与相关函数有关的二阶统计量, 因此不能使用传统意义的信噪比来衡量此噪声模型下的信噪比, 可用广义信噪比 (SNR, signal-to-noise ratio) 来表示 α 噪声的信噪比^[21]。

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \lg \left(\frac{\sigma_s^2}{\gamma_v} \right) \quad (26)$$

其中, σ_s 表示输入信号方差。

用归一化均方误差 (NMSE, normalized mean square error) 曲线来衡量自适应滤波算法的性能, 通过对偏差进行归一化处理, 将估计的信道参数与原始模拟的信道参数进行比较, 从而更直观、更准确地反映算法的有效性。该曲线能够衡量算法的收敛速度、收敛稳态误差以及系统跟踪能力。NMSE 的表达式^[22]为

$$NMSE = 10 \lg \left(\frac{\|w_0 - w(n)\|^2}{\|w_0\|^2} \right) \quad (27)$$

NMSE 曲线收敛速度越快, 表明算法的收敛性能越好; 收敛时的 NMSE 值越低, 表明算法的稳态误差越低。在自适应信道估计中, 所追求的是更好地平衡收敛速度和稳态误差。

4.2 变步长参数对性能影响分析

4.2.1 变步长参数设置分析

在工程应用中, 当 NMSE 小于 -45 dB 后, 参数的量化误差及处理舍入误差等导致的噪声成为制约系统性能的主要因素, 故在研究变步长中的参数设置时, 当 NMSE 取值小于 -45 dB 后主要考虑收敛速度对系统性能的影响。

变步长参数 a 用来调节幅度, a 决定了当误差 $e(n)$ 取值较小时, 改进高斯函数的最大输出值。较大的 a 值会使函数的最大值增大, 从而加速算法的收敛。通过调节 a , 可以确保当误差接近零时, 函数输出较小, 从而减小步长, 使算法能够逐步调整至稳态, 减少稳态误差。参数 b 通过反馈控制函数响应的集中度和峰值位置, 主要影响系统的稳定性。当误差 $e(n)$ 接近 \sqrt{b} 时, 函数会产生较大的值, 从而产生大步长, 推动算法快速收敛。当误差远离 b 时, 函数值会迅速衰减到接近零, 因此避免了算法在较大误差时过度更新, 从而提高了系统的稳定性, 在受到脉冲噪声干扰时, 能够维持稳定性能。研究表明, 当参数 a 的取值范围在 $[0.001, 0.005]$ 、 b

的取值范围在 $[0.01, 0.05]$ 时, 算法能较快收敛同时具有较好的稳态误差^[18-19]。

核宽 σ 的调节能够影响步长更新的速率, 取值范围通常为 $\sigma^2 \geq 0$ 。在受到脉冲噪声干扰的情况下, 较大 σ 能够保证算法保持稳定性。

4.2.2 性能分析

在 α 稳定分布脉冲噪声背景下, 本节将讨论 CVSS-LMP 算法中变步长参数对算法性能的影响。仿真环境参数设计如下: 输入信号 $x(n)$ 是均值为 0、方差为 1 的高斯序列, 信号长度 L 为 2×10^4 ; 未知信道抽头系数服从均值为 0 的高斯分布, 信道长度为 128, 同时滤波器阶数 $M=128$ 。系噪声参数选择 $V_1=[1.4, 0, 0.03, 0]$, 范数 p 取 1.2, 平滑因子 θ 取 0.98, 算法性能由 NMSE 曲线描述, 所有仿真结果由 100 次蒙特卡罗仿真获得。参数 $V_1=[1.4, 0, 0.03, 0]$ 下噪声信号如图 3 所示。研究参数对算法信道估计性能的影响, 变步长算法参数设置如表 2 所示。固定参数均是在算法稳定时, 根据试错法选取的最佳参数^[23]。

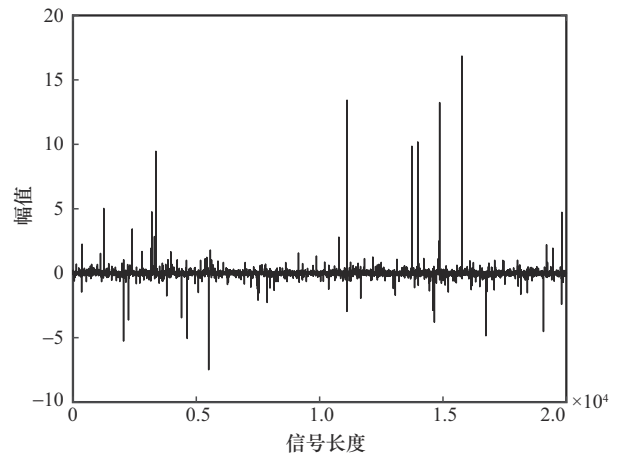


图 3 参数 $V_1=[1.4, 0, 0.03, 0]$ 下噪声信号

研究变步长中参数 a 对算法信道估计性能的影响, 参数设置如表 2 中场景 1 所示。不同参数 a 下 CVSS-LMP 算法性能曲线如图 4 所示。分析图 4 可知, 当 a 大于 0.004 0 时, CVSS-LMP 算法收敛速度

表 2 变步长算法参数设置

场景	固定参数	可变参数
1	$b=0.015, k=3.0, \sigma=0.10$	a 分别取值为 0.002 0、0.002 5、0.002 8、0.003 0、0.003 2、0.003 5 和 0.004 0
2	$a=0.003 0, k=3.0, \sigma=0.10$	b 分别取值为 0.005、0.010、0.012、0.015、0.018、0.020 和 0.025
3	$a=0.003 0, b=0.015, \sigma=0.10$	k 分别取值为 2.0、2.5、2.8、3.0、3.2、3.5、4.0
4	$a=0.003 0, b=0.015, k=3.0$	σ 分别取值为 0.07、0.08、0.09、0.10、0.12、0.15 和 0.50

逐渐变快, 但NMSE逐渐变高。当 a 取0.003 0时, NMSE为-47.87 dB, CVSS-LMP算法收敛时迭代次数为2 907。在本仿真环境下, 为获得更快的收敛速度和更低的稳态误差, 当参数 a 取值为0.003 0附近时, CVSS-LMP算法性能相对更优。

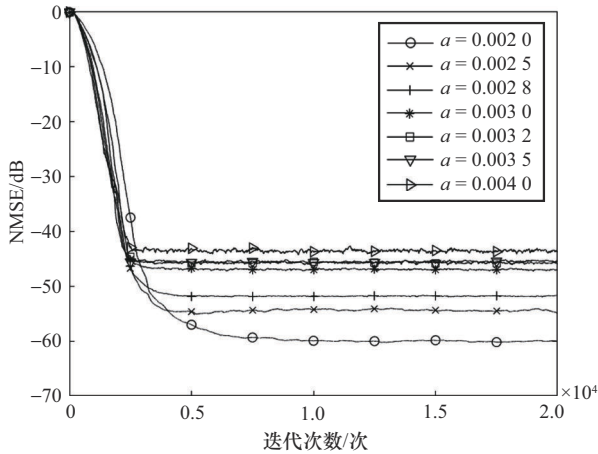


图4 不同参数 a 下CVSS-LMP算法性能曲线

研究变步长中参数 b 对算法信道估计性能的影响, 参数设置如表2中场景2所示。不同参数 b 下CVSS-LMP算法性能曲线如图5所示。分析图5可知, 参数 b 同时影响CVSS-LMP算法收敛速度和稳态误差, 当参数 b 取值为0.005、0.010和0.015时, CVSS-LMP算法的收敛速度相差不大, 但在参数 b 取值为0.015时CVSS-LMP算法的稳态误差相对更低。当 b 大于0.015时, CVSS-LMP算法收敛速度明显减小, 不同参数 b 下CVSS-LMP算法稳态误差不同。综上所述, 在本仿真条件下, b 取0.015时, CVSS-LMP算法性能收敛性和稳态误差能相对更优。

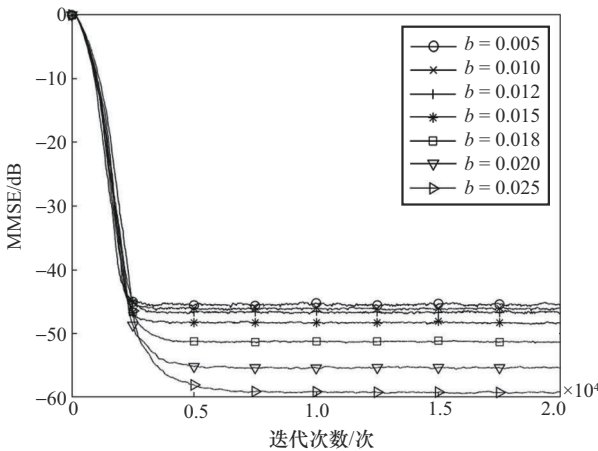


图5 不同参数 b 下CVSS-LMP算法性能曲线

研究变步长中参数 k 对算法信道估计性能的影响, 参数设置如表2中场景3所示。不同参数 k 下CVSS-LMP算法性能曲线如图6所示。分析图6可知, 当 k 大于2.5时, CVSS-LMP算法收敛速度相差不大; 当 k 大于3.2时, CVSS-LMP算法性能曲线在收敛前出现抖动现象, 稳定性较差, 易受干扰; 当 k 等于3.0时, CVSS-LMP算法NMSE为-47.87 dB, 小于-45 dB。在本仿真条件下, 结合分析, 参数 k 取值在3附近时, CVSS-LMP算法性能收敛性和稳态误差能相对更优。

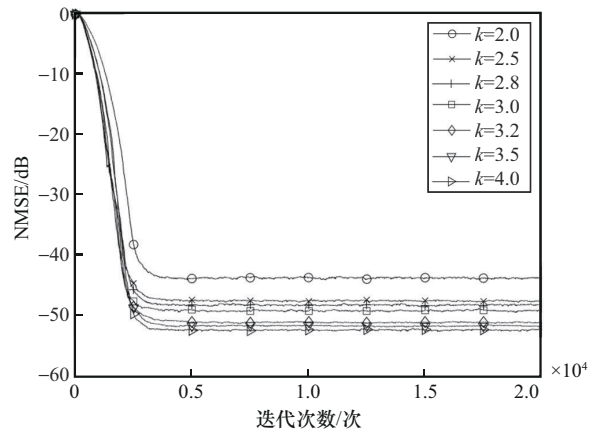


图6 不同参数 k 下CVSS-LMP算法性能曲线

研究核宽 σ 对CVSS-LMP算法信道估计性能的影响, 参数设置如表2中场景3所示。不同核宽 σ 下CVSS-LMP算法性能曲线如图7所示。分析图7可知, 当 σ 大于0.10时, CVSS-LMP算法稳态误差相差不大; 当 σ 等于0.10时, CVSS-LMP算法收敛速度更快; 当 σ 小于0.10时, CVSS-LMP算法稳态误差逐渐变大, 但收敛速度逐渐变慢。综上所述, 在本仿真条件下, 当核宽 σ 取值在0.10附近时, CVSS-LMP算法性能收敛性和稳态误差能相对更优。

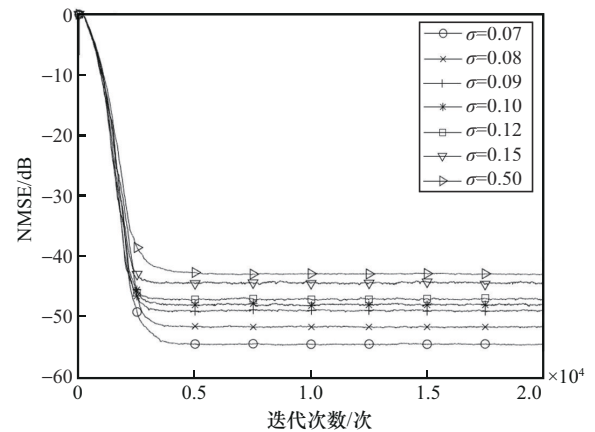


图7 不同核宽 σ 下CVSS-LMP算法性能曲线

综上, 参数 a 取 0.0030、参数 b 取 0.015、参数 k 取 3.0、核宽 σ 取 0.10 时, CVSS-LMP 算法收敛性和稳态误差能相对更优。

4.3 LMP 类典型方法性能对比分析

本节对所提算法和典型的 LMP 类算法, 如 G-LMP、IVS-LMP、VSS-LMP、IVSS-LMP 和变步长相关熵诱导 LMP (VSS-CIM-LMP, variable step-size correntropy induced metric constraint LMP), 进行性能对比分析, 仿真参数如表 3 所示, 范数 p 取 1.2。稳定分布噪声参数由式(25)和式(26)可知, 当参数 V 分别为 $V_2=[1.4, 0, 0.3, 0]$ 、 $V_1=[1.4, 0, 0.03, 0]$ 、 $V_3=[1.4, 0, 0.003, 0]$, 信噪比分别为 5 dB、15 dB 和 25 dB 时, 算法性能曲线分别如图 8、图 9 和图 10 所示。

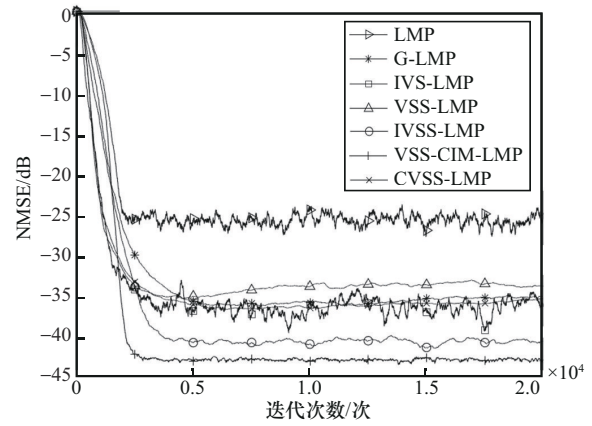


图 8 信噪比为 5 dB 时各算法性能曲线

由图 8 可知, 在信噪比为 5 dB 的低信噪比情况下, 与 LMP 相比较, G-LMP、IVS-LMP、VSS-

表 3 各算法变步长参数取值

算法	变步长	参数	信噪比为 5 dB	信噪比为 15 dB	信噪比为 25 dB
LMP	μ	μ	0.006 5	0.005	0.005
G-LMP	$\mu = a(1 - \exp(-b e(n) ^c))$	a, b, c	$a=0.2$ $b=2$ $c=0.01$	$a=0.4$ $b=2$ $c=0.07$	$a=0.5$ $b=2$ $c=0.07$
IVS-LMP	$\mu(n) = \theta\mu[e(n-1)] + (1-\theta)a \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \exp(b e(n))}\right)$	a, b, θ, m, n	$a=0.02$ $b=10$ $\theta=0.98$ $m=70$ $n=5$	$a=0.02$ $b=10$ $\theta=0.98$ $m=70$ $n=5$	$a=0.02$ $b=10$ $\theta=0.98$ $m=70$ $n=5$
VSS-LMP	$\mu(n) = \theta\mu[e(n-1)] + (1-\theta)a e(n) ^2 \exp(-b e(n) ^2)$	a, b, θ	$a=0.002 6$ $b=0.02$ $\theta=0.98$	$a=0.002 6$ $b=0.015$ $\theta=0.98$	$a=0.003 0$ $b=0.015$ $\theta=0.98$
IVSS-LMP	$f_e(n) = k_{ap} \sqrt{\sum_{i=n-k+1}^n e(i) ^2}$ $\mu(f_e(n)) = \theta\mu[f_e(n-1)] + (1-\theta)af_e(n) \exp(f_e(n))$	a, b, θ, k, k_{ap}	$a=0.002 6$ $b=0.02$ $\theta=0.98$ $k=3$ $k_{ap}=1.1$	$a=0.002 6$ $b=0.015$ $\theta=0.98$ $k=3$ $k_{ap}=1.1$	$a=0.002 6$ $b=0.015$ $\theta=0.98$ $k=3$ $k_{ap}=1.1$
VSS-CIM-LMP	$\mu(n) = \theta\mu[e(n-1)] + (1-\theta)a e(n) ^2 \exp(-b e(n) ^2)$ $w(n+1) = w(n) + \mu[f_e(n)]\mu e(n) ^{p-2}e(n)x(n) - \rho w(n) \exp\left(-\frac{w^2(n)}{2\sigma^2}\right)$	a, b, θ, ρ	$a=0.002 6$ $b=0.02$ $\theta=0.98$ $\rho=0.000 6$	$a=0.002 6$ $b=0.015$ $\theta=0.98$ $\rho=0.000 6$	$a=0.003 0$ $b=0.015$ $\theta=0.98$ $\rho=0.000 6$
CVSS-LMP	$f_e(n) = k \sum_i \left(1 - \exp\left(-\frac{e(i)^2}{\sigma^2}\right)\right)$ $\mu(f_e(n)) = \theta\mu[f_e(n-1)] + (1-\theta)af_e(n) \exp(f_e(n))$	a, b, θ, k, σ	$a=0.002 6$ $b=0.02$ $\theta=0.98$ $k=3$ $\sigma=0.1$	$a=0.0030$ $b=0.015$ $\theta=0.98$ $k=3$ $\sigma=0.1$	$a=0.003 0$ $b=0.015$ $\theta=0.98$ $k=3$ $\sigma=0.1$

LMP、IVSS-LMP 和 VSS-CIM-LMP 收敛速度略慢但获得了更低的稳态误差。IVSS-LMP 的 NMSE 值为 -41.01 dB, 收敛时迭代次数为 3 379; CVSS-LMP 的 NMSE 值为 -42.61 dB, 收敛时迭代次数为 2 913; CVSS-LMP 收敛速度明显优于其他仿真算法, 同时 CVSS-LMP 收敛时的稳态误差最低。

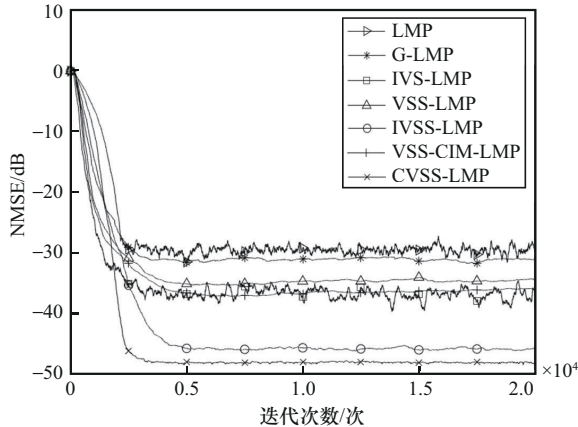


图9 信噪比为 15 dB 时各算法性能曲线

由图9可知, 在信噪比为 15 dB 时, 与 LMP 相比较, G-LMP 和 VSS-LMP 收敛速度略慢但获得了更低的稳态误差, IVS-LMP 收敛速度略快且获得了更低的稳态误差。与 VSS-LMP 和 VSS-CIM-LMP 相比较, IVSS-LMP 收敛速度略慢但稳态误差更低。CVSS-LMP 的 NMSE 为 -47.87 dB, 收敛时迭代次数为 2 907; IVSS-LMP 的 NMSE 为 -45.15 dB, 收敛时迭代次数为 3 906。CVSS-LMP 收敛速度明显优于其他仿真算法, 同时 CVSS-LMP 收敛时的稳态误差最低。

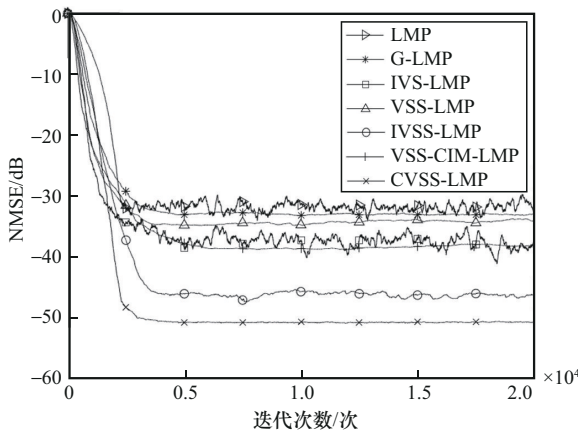


图10 信噪比为 25 dB 时各算法性能曲线

由图 10 可知, 在信噪比为 25 dB 时, CVSS-LMP 收敛速度明显优于其他仿真算法, 同时

CVSS-LMP 收敛时的稳态误差最低。与 LMP 相比较, G-LMP 相差不大, IVS-LMP、VSS-LMP 和 VSS-CIM-LMP 收敛速度略慢但获得了更低的稳态误差; 与 IVS-LMP 相比, VSS-LMP 收敛速度略快但稳态误差更高; IVSS-LMP 收敛速度更快且得了更低的稳态误差, 但与 CVSS-LMP 相比收敛速度略慢且稳态误差更高。CVSS-LMP 的 NMSE 为 -50.87 dB, 收敛时迭代次数为 2 907; IVSS-LMP 的 NMSE 为 -46.80 dB, 收敛时迭代次数为 3 926。

通过上述对比分析可知, 在信噪比为 5 dB 的低信噪比情况下, CVSS-LMP 比 IVSS-LMP 收敛速度提高 17% 左右、稳态精度提高 2 dB 左右。在信噪比为 15 dB 时, CVSS-LMP 比 IVSS-LMP 收敛速度提高了 33%、稳态精度提高 3 dB 左右。在信噪比 25 dB 时, CVSS-LMP 比 IVSS-LMP 收敛速度至少提高 33%、稳态精度提高 3 dB 左右。和 LMP 类算法相比, CVSS-LMP 对 α 稳定分布脉冲噪声具有更快的收敛速度和更强的鲁棒性。

5 结束语

在 α 稳定分布脉冲噪声背景下, 本文用互相关熵诱导度量来表示误差向量与零向量之间的相似性, 给出了基于高斯核函数的误差向量与零向量互相关熵的度量方法, 并采用移动平均法构造变步长 LMP 算法。实验对比了 CVSS-LMP 算法和 LMP 类典型算法的性能, 在信噪比为 5 dB 时, 其收敛速度提高了 17%、稳态精度提高 2 dB 以上; 在信噪比为 15 dB 时, 其收敛速度提高 17%、稳态精度提高 3 dB 以上; 在信噪比为 25 dB 时, 其收敛速度提高 33%、稳态精度提高 3 dB 以上。本文算法对 α 稳定分布脉冲噪声具有更快的收敛速度和更强的鲁棒性。

参考文献:

- [1] 郝燕玲, 单志明, 沈锋. α 稳定分布噪声下基于梯度范数的 VSS-NLMP 算法[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(4): 652-656.
HAO Y L, SHAN Z M, SHEN F. Gradient-norm based VSS-NLMP algorithm in α -stable environments[J]. Systems Engineering and Electronics, 2012, 34(4): 652-656.
- [2] GENÇAGA D, ERTUZUN A, KURUOĞLU E E. Modeling of non-stationary autoregressive α -stable processes by particle filters[J]. Digital Signal Processing, 2008, 18(3): 465-478.
- [3] 朱晓波, 王首勇, 李旭涛, 等. 非高斯杂波中的 MIMO 雷达信号分离[J].

- 系统工程与电子技术, 2010, 32(6): 1210-1214.
- ZHU X B, WANG S Y, LI X T, et al. MIMO radar signal separation in non-Gaussian clutter[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(6): 1210-1214.
- [4] 唐洪, 邱天爽. Alpha 稳定分布噪声下广义恒模算法收敛性能的研究[J]. 电子学报, 2009, 37(1): 118-121.
- TANG H, QIU T S. Convergence properties of the GCMA in alpha-stable noise environment[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(1): 118-121.
- [5] 郝燕玲, 单志明, 沈锋. 基于 DRAM 算法的 α 稳定分布参数估计[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2011, 39(10): 73-78.
- HAO Y L, SHAN Z M, SHEN F. Parameter estimation of α -stable distributions using DRAM algorithm[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2011, 39(10): 73-78.
- [6] DINIZ P. Adaptive filtering: algorithms and practical implementation[M]. Berlin: Springer, 2020.
- [7] ABOULNASR T, MAYYAS K. A robust variable step-size LMS-type algorithm: analysis and simulations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, 45(3): 631-639.
- [8] RAMADAN Z, POULARIKAS A. Performance analysis of a new variable step-size LMS algorithm with error nonlinearities[C]//Thirty-Sixth Southeastern Symposium on System Theory, 2004. Proceedings of the Piscataway: IEEE Press, 2004: 384-388.
- [9] ZHAO H Q, LIU B, SONG P C. Variable step-size affine projection maximum correntropy criterion adaptive filter with correntropy induced metric for sparse system identification[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(11): 2782-2786.
- [10] SHAO M, NIKIAS C L. Signal processing with fractional lower order moments: stable processes and their applications[J]. Proceedings of the IEEE, 1993, 81(7): 986-1010.
- [11] BERSHAD N J, BERMUDEZ J C. A switched variable step size NLMS adaptive filter[J]. Digital Signal Processing, 2020, 101: 102730.
- [12] ARIKAN O, BELGE M, CETIN A E, et al. Adaptive filtering approaches for non-Gaussian stable processes[C]//Proceedings of the 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 1995: 1400-1403.
- [13] 郝燕玲, 单志明, 吕东泽, 等. 脉冲噪声下基于梯度加权平均的变步长 NLMP 算法[J]. 宇航学报, 2012, 33(5): 655-660.
- HAO Y L, SHAN Z M, LV D Z, et al. Variable step-size NLMP algorithm with a gradient-based weighted average in impulsive environments[J]. Journal of Astronautics, 2012, 33(5): 655-660.
- [14] 李涵琼. 稀疏自适应滤波算法及其水声信道估计应用研究[D]. 镇江: 江苏科技大学, 2022.
- LI H Q. Sparse adaptive filtering algorithm and its application in underwater acoustic channel estimation[D]. Zhenjiang: Jiangsu University of Science and Technology, 2022.
- [15] 晁鹏, 王彪, 李涵琼, 等. 基于改进双曲正切函数的变步长最小平均 p 范数算法[J]. 声学技术, 2023, 42(3): 373-380.
- CHAO P, WANG B, LI H Q, et al. A variable step size least mean p -norm algorithm based on improved hyperbolic tangent function[J]. Technical Acoustics, 2023, 42(3): 373-380.
- [16] WANG W H, ZHAO J H, QU H, et al. A correntropy inspired variable step-size sign algorithm against impulsive noises[J]. Signal Processing, 2017, 141: 168-175.
- [17] 王彪, 李涵琼, 高世杰, 等. 一种变步长最小平均 p 范数自适应滤波算法[J]. 电子与信息学报, 2022, 44(2): 661-667.
- WANG B, LI H Q, GAO S J, et al. A variable step size least mean p -power adaptive filtering algorithm[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2022, 44(2): 661-667.
- [18] WANG B, GAO S J, GE H L, et al. A variable step size for maximum correntropy criterion algorithm with improved variable kernel width[J]. IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering, 2020, 15(10): 1465-1474.
- [19] ZHU B Y, WANG B, CAI B G, et al. A variable step size least mean p -power adaptive filtering algorithm based on multi-moment error fusion[J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2023, 2023, 77: 11-15.
- [20] ZHAO Z J, DONG K H, XU C Y. Data block adaptive filtering algorithms for α -stable random processes[J]. Digital Signal Processing, 2007, 17(4): 836-847.
- [21] 朱晓梅, 朱卫平, 李森. 一种基于分数低阶矩的 α 稳定分布噪声中频谱感知方案[J]. 南京邮电大学学报(自然科学版), 2014, 34(3): 23-27, 35.
- ZHU X M, ZHU W P, LI S. An FLOM-based spectrum sensing scheme in α -stable distributed noise[J]. Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2014, 34(3): 23-27, 35.
- [22] SHI, L, ZHAO H, ZAKHAROV Y. An improved variable kernel width for maximum correntropy criterion algorithm[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(7): 1339-1343.
- [23] 杨威, 刘宏清, 黎勇, 等. 冲击噪声下的 LMS 和 RLS 联合滤波算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2017, 44(2): 165-170.
- YANG W, LIU H Q, LI Y, et al. Joint estimation algorithms based on LMS and RLS in the presence of impulsive noise[J]. Journal of Xidian University, 2017, 44(2): 165-170.

[作者简介]



汤琦 (1975-), 男, 安徽枞阳人, 博士, 西安邮电大学高级工程师, 主要研究方向为阵列、通信信号处理。



杨欣柳 (2001-), 女, 陕西汉中, 西安邮电大学硕士生, 主要研究方向为信道估计。